MATEMATICA

6to AÑO

MATEMATICA 6to año

Bloque 1

Expresiones Algebraicas

Bloque 2

Razones Trigonométricas

Bloque 3

Funciones

Bloque 4

Probabilidad y Estadística

BLOQUE Nro 1

EXPRESIONES ALGEBRAICAS:

Una expresión algebraica es una combinación finita de números (coeficientes) y letras (variables o indeterminadas) relacionadas entre sí mediante operaciones de suma (+), resta (–), multiplicación (•), división (:), potenciación y radicación.

Ejemplos:

$X-Y$ $\qquad\qquad$ $3X + 4^3$

Si las indeterminadas no están afectadas por una raíz o actuando como divisor, las expresiones algebraicas se denominan ***polinomio***.

Polinomios

- Son las expresiones algebraicas más usadas.

- Sean a_0, a_1, a_2, …, a_n números reales y **n** un número natural, llamaremos **polinomio en indeterminada x** a toda expresión algebraica entera de la forma:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

¿Cómo se determina el grado de un polinomio?

- El grado de un polinomio es el grado máximo de los términos que lo componen.

$$7x^3-9x^2+4x-7$$

El término de grado máximo es el primer término, ya que está elevado a la tercera potencia, por lo tanto:

El polinomio es de tercer grado.

Partes de un Polinomio

Grado del polinomio

$$5x^3 + 2x^2 - 4x + 7$$

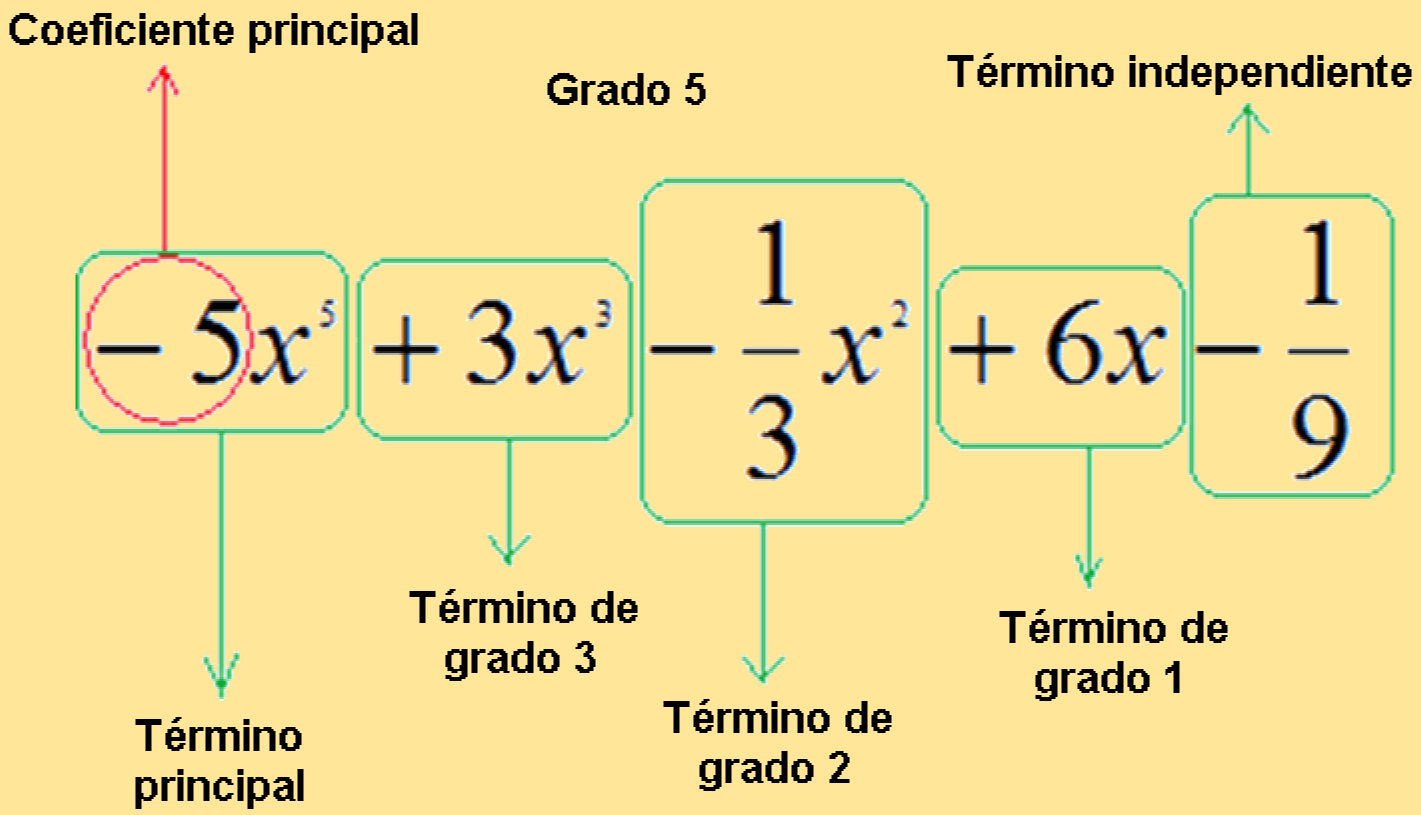
Coeficientes

x: Variable

5: Coeficiente principal

7: Término independiente

- **Partes de un *POLINOMIO*:**



Es importante aclarar que un polinomio cuenta con *grados*, que son todos los exponentes que acompañan a la variable x. En este caso los grados serian 0,1,2,3,5. En donde el grado de mayor valor numérico, es el grado del polinomio. En este ejemplo el grado del polinomio es 5.

Recordemos que -1/9 está multiplicando a x^0, pero como x^0 es igual a 1 (ya que todo valor o número elevado a la 0 es 1), por lo tanto queda: -1/9 . X^0= -1/9 . 1 = -1/9. Por esta razón en el término independiente siempre se coloca solamente al coeficiente.

Suma de polinomios

Para realizar la suma de dos o más polinomios, se deben sumar los coeficientes de los términos cuyos grados sean iguales, es decir, las variables y exponentes deben ser los mismos en los términos a sumar.

- Ejemplo: $(8x^4 + 5x^2 + 3x + 2) + (3x^3 + 8x + 2)$

$$\begin{array}{rrrrr}
8x^4 + & & + 5x^2 & + 3x & + 2 \\
 & + 3x^3 + & & 8x & + 2 \\
\hline
8x^4 & + 3x^3 & + 5x^2 & + 11x & + 4
\end{array}$$

$(8x^4 + 5x^2 + 3x + 2) + (3x^3 + 8x + 2) = 8x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 11x + 4$

Resta de polinomios:

La resta de polinomios consiste en sumar al minuendo el opuesto del sustraendo. También podemos restar polinomios escribiendo el opuesto de uno debajo del otro, de forma que los monomios semejantes queden en columnas y se puedan sumar.

- Por ejemplo : $(9x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 6x - 1) - (7x^4 + 8x^2 - 7x + 5)$

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & 9x^4 & +\,4x^3 & +\,3x^2 & -\,6x & -\,1 \\
+ & -7x^4 & + & -\,8x^2 & +\,7x & -\,5 \\
\hline
 & 2x^4 & +\,4x^3 & -\,5x^2 & +\,x & -\,6
\end{array}
$$

$(9x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 6x - 1) - (7x^4 + 8x^2 - 7x + 5) = 2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + x - 6$

En el siguiente video se puede ver como se realiza la suma y resta de polinomios:
https://www.youtube.com/watch?v=5HSmf594tfk

División de plinomios por Ruffini:

$(5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 3) : (x - 1)$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 5 & -3 & 2 & -7 & 3 \\
\hline
 & & & & & \\
1 & \downarrow & 5 & 2 & 4 & -3 \\
\hline
 & 5 & 2 & 4 & -3 & \underline{|0}
\end{array}
$$

Dividendo: $5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 3$

Divisor: $x - 1$

Cociente: $5x^3 + 2x^2 + 4x - 3$

Resto: 0

En el siguiente video puedes observar mejor como realizar una división de polinomio por Ruffini: https://www.youtube.com/watch?v=5HSmf594tfk

Productos de Polinomio:

El producto de polinomios se obtiene multiplicando cada término o monomio del primero por el segundo y reduciendo luego los términos semejantes. De este modo obtenemos el polinomio resultante.

- Por ejemplo:

$$(1-2x)\cdot(1+2x)=$$

$$=1\cdot 1+1\cdot 2x+$$

$$-2x\cdot 1-2x\cdot 2x=$$

$$=1+2x-2x-4x^2=$$

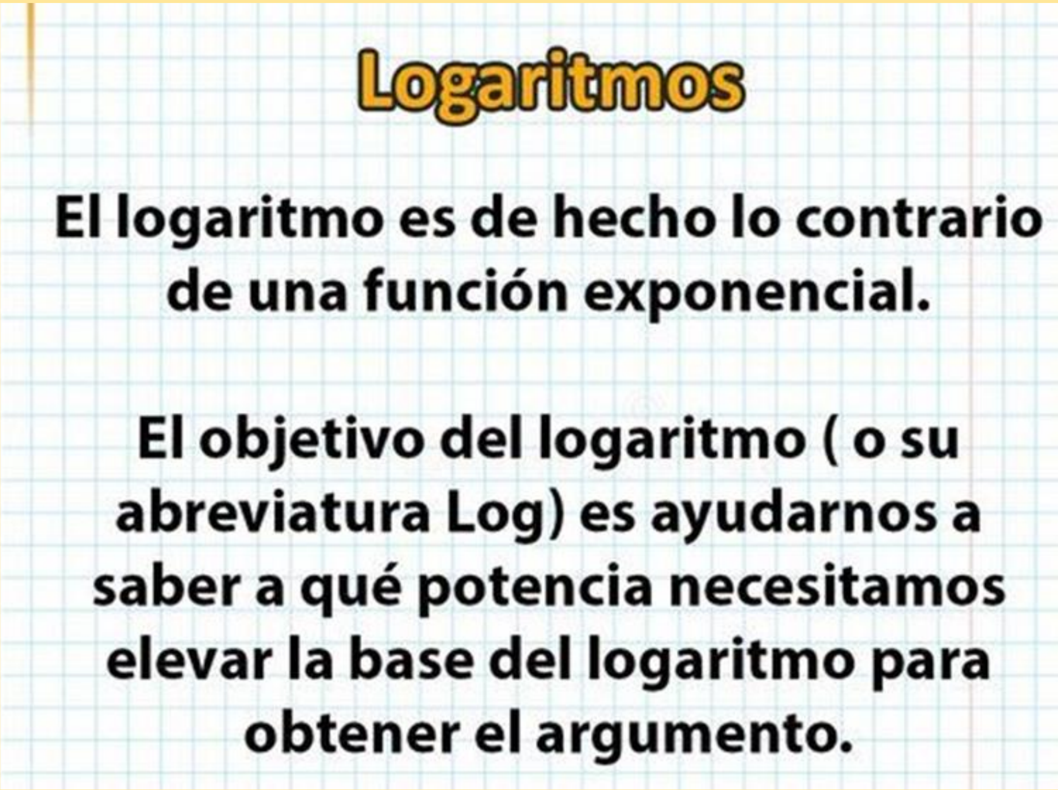
$$=1-4x^2$$

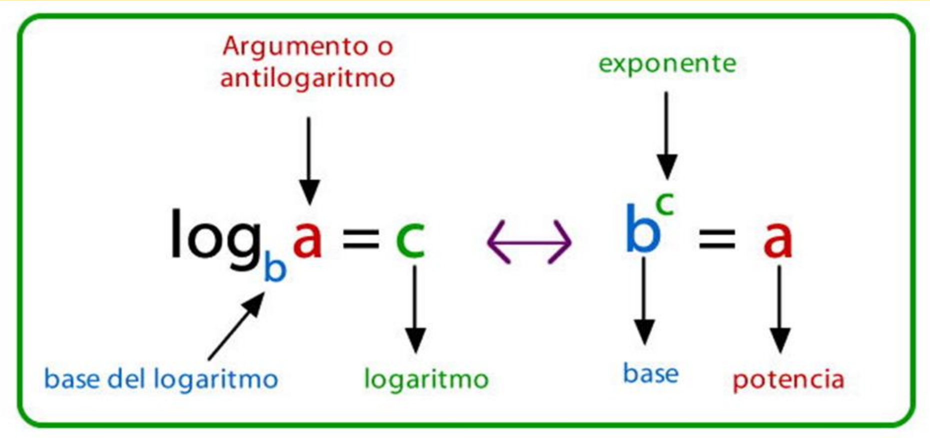
En el siguiente video podrán observar mejor como se realiza la multiplicación de polinomios: https://www.youtube.com/watch?v=eETVyKR2zwY

<u>Raíces de un polinomio</u>: En matemáticas, las raíces (o ceros) de un polinomio son los valores que anulan el polinomio. Es decir, las raíces de un polinomio son todos aquellos valores que cuando se evalúan en el polinomio su valor numérico es igual a 0.

Un polinomio siempre tiene el mismo número de ceros que el grado de la función. Si el máximo exponente es dos, entonces se tienen dos ceros; si el grado es tres, se tienen tres ceros y si el grado es cuatro, el polinomio tendrá cuatro ceros.

<u>Logaritmo:</u>





Propiedades de los Logaritmos:

Logaritmo del producto

$$\log (a.b) = \log (a) + \log (b)$$

El logaritmo de un producto de factores es la suma de los logaritmos de los factores.

Logaritmo del cociente

$$\log (a/b) = \log (a) - \log (b)$$

El logaritmo de un cociente es la resta de los logaritmos del numerador y del denominador.

Logaritmo de la potencia

$$\log (ab) = b \;.\; \log (a)$$

El logaritmo de una potencia es el producto del exponente de la potencia por el logaritmo de la base.

ECUACIONES:

Se llaman ecuaciones a igualdades en las que aparecen números y letras (llamadas incógnitas o variables), relacionados mediante operaciones matemáticas.

Por ejemplo: $3x - 2 = x + 1$

Resolver una ecuación consiste en encontrar el valor que debe tomar la incógnita X para que se cumpla la igualdad. Podemos comprobar si la solución encontrada es correcta sustituyendo la incógnita x por la solución, y si se cumple la igualdad el valor hallado es correcto.

Ecuaciones de primer grado o lineales:

Las ecuaciones de primer grado reciben este nombre porque sus variables (incógnitas) están elevadas a la primera potencia (X^1), que suele representarse solo con una X.

En el siguiente link pueden mirar un ejemplo sobre que son y cómo se resuelve una ecuación de primer grado.

https://www.youtube.com/watch?v=omIl6f_X4fE

Ecuaciones de segundo grado: Son ecuaciones de segundo grado aquellas en las que la incógnita aparece al menos una vez elevada al cuadrado (x^2).

Por ejemplo: $3x^2 - 3x = x - 1$.

Pasemos al primer miembro de la ecuación todos los términos de forma que en el segundo miembro quede 0.

Obtenemos:

$3x^2 - 4x + 1 = 0$, que es la forma en que debemos expresar todas la ecuaciones de segundo grado para resolverlas. A partir de allí aplicaremos la formula de la ***RESOLVENTE.***

Formula de la Resolvente:

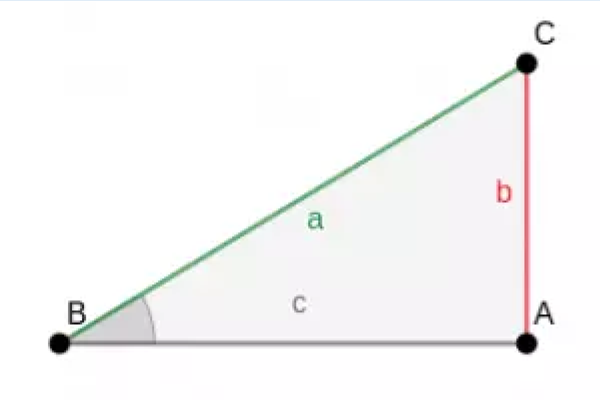
$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

En el siguiente video podrán observar con mayor claridad que son y como se resuelven las ecuaciones de segundo grado: https://www.youtube.com/watch?v=ZC67c5ar9mA

BLOQUE N^{ro} 2:

Razones trigonométricas

Las razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo son las siguientes:



Seno: El seno del ángulo B es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa. Se denota por sen B.

Fórmula de seno:

$$\operatorname{sen} B = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

Coseno: El coseno del ángulo B es la razón entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa. Se denota por cos B.

fórmula del coseno:

$$\cos B = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

Tangente: La tangente del ángulo B es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto adyacente al ángulo. Se denota por tan B o tg B.

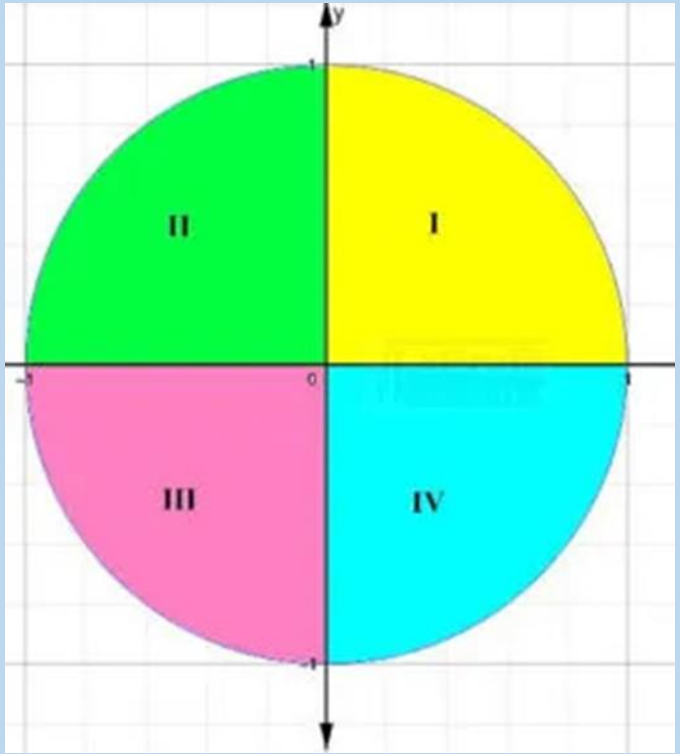
Fórmula de la tangente:

$$\tan B = \frac{\operatorname{sen} B}{\cos B} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{c}$$

En el siguiente video podrán observar mejor sobre las razones trigonométricas a través de un ejemplo: https://www.youtube.com/watch?v=NFcbb3BX-70

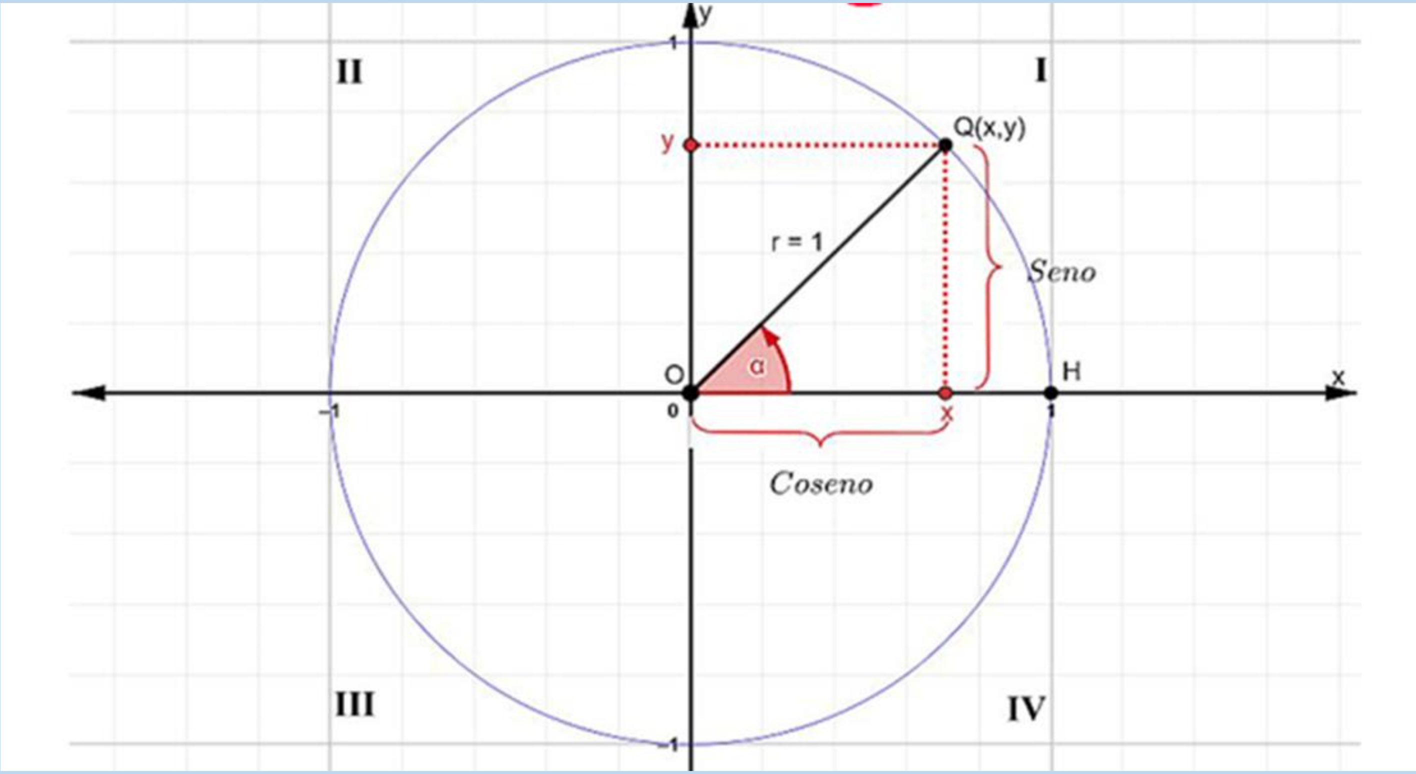
Circunferencia trigonométrica:

También es llamada circunferencia unitaria, su centro está localizado en el origen del plano cartesiano y posee un radio cuyo valor es = 1 , por esta razón es llamada también circunferencia unitaria.



también puedes notar que el sistema de eje cartesiano divide a la circunferencia en cuatro regiones iguales, cada región es llamada cuadrante, con una numeración del 1 al 4 escrito en números romanos en el sentido anti horario.

En la siguiente figura el ángulo α posee lado inicial   y lado final, este lado es llamado radio y se le asigna la letra “r” las coordenadas del lado final es el punto Q (x,y) y estas coordenadas se proyectan sobre los ejes cartesianos, aquí se puede apreciar la formación de un triángulo rectángulo, al seguir realizando más rotaciones surgen más triángulos rectángulos.



BLOQUE Nro 3:

FUNCIONES:

Las funciones son expresiones algebraicas que relacionan dos magnitudes diferentes. Es decir, relacionan cada elemento de una magnitud con un único elemento de otra magnitud.

Por ejemplo, se puede relacionar matemáticamente la velocidad de una persona con el tiempo que tardará en recorrer un tramo utilizando una función.

Las funciones se expresan mediante la letra *y* o con el símbolo *f(x)* indistintamente:

$$y = f(x)$$

Donde *x* es la variable independiente e *y* es la variable dependiente.

Es importante aclarar que para que una expresión se considere una función solo puede existir un único valor de la función para cada valor de x.

Función lineal: una función lineal es una función cuya gráfica es una línea recta, es decir, una función cuyo polinomio es de grado cero o uno.

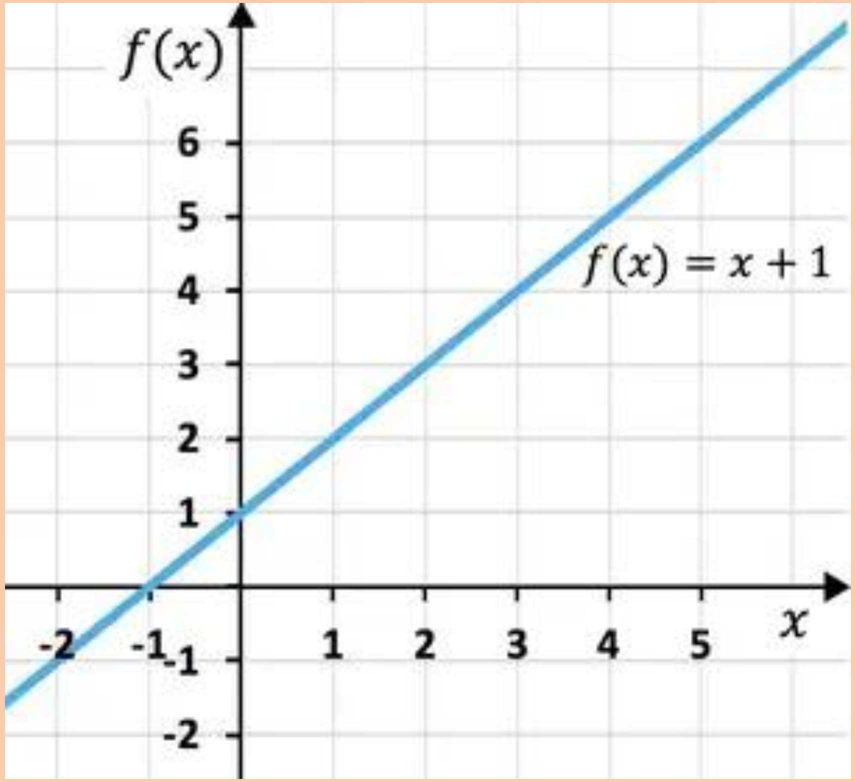
Por ejemplo:

$$f(x)=3x+1$$

Función de segundo grado: Una función cuadrática es un tipo de función que se caracteriza por ser un polinomio de segundo grado. Su representación gráfica es una parábola.

Por ejemplo:

$$f(x)= x^2-5x+7$$



Como ves en la gráfica, cuando x es 2, *f(x)* es 3. Esto se escribe de la siguiente manera:

f(2)=3

También lo podríamos haber calculado numéricamente sustituyendo la x por su valor correspondiente en la expresión de la función:

f(x)=x+1

f(2)=2+1=3

Representación gráfica de funciones

En este apartado veremos cómo representar una función en una gráfica. Para ello, resolveremos un ejercicio paso a paso e iremos explicando el método mientras resolvemos el ejercicio.

Representa en una gráfica la siguiente función:

$$f(x)=2x-1$$

Lo primero que debemos hacer es crear una tabla de valores. Para ello vamos otorgando los valores que queramos a x para obtener valores de f(x):

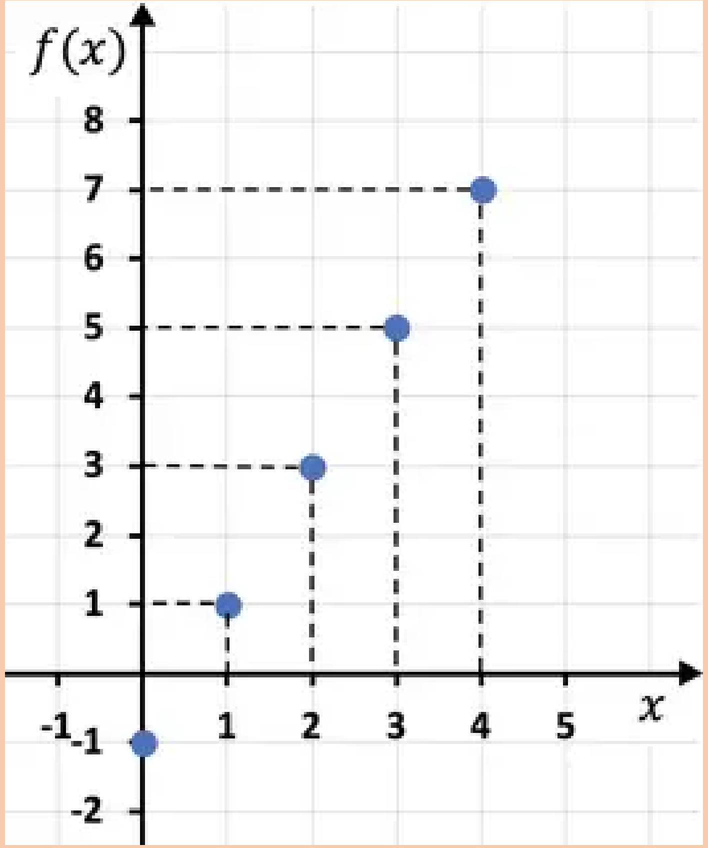
$$f(x) = 2x - 1$$

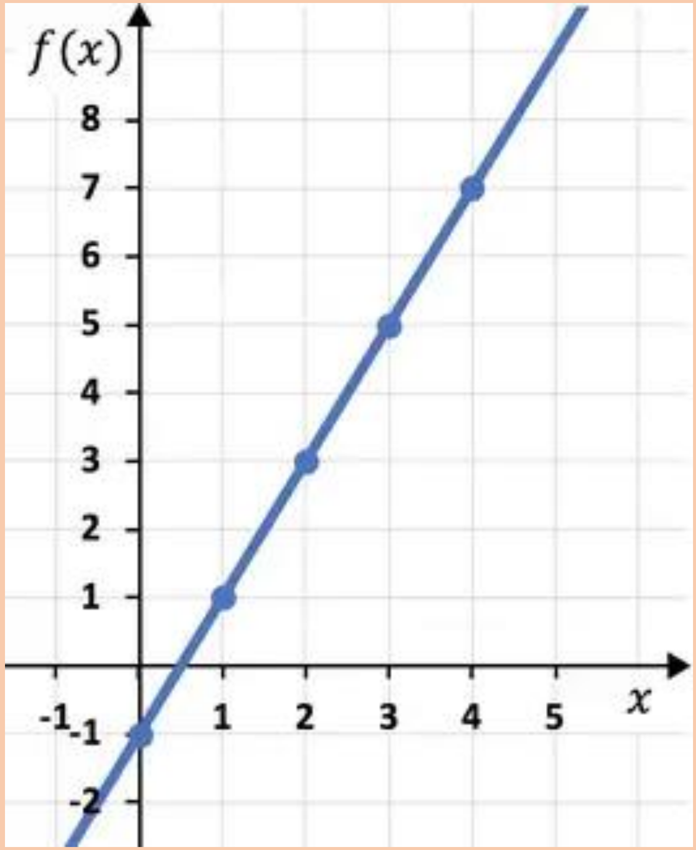
$$x = 0 \longrightarrow f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$$
$$x = 1 \longrightarrow f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$
$$x = 2 \longrightarrow f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$
$$x = 3 \longrightarrow f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$
$$x = 4 \longrightarrow f(4) = 2 \cdot 4 - 1 = 7$$

x	$f(x)$
0	-1
1	1
2	3
3	5
4	7

Cuanto más puntos calculemos, más precisa será la representación gráfica de la función.

Una vez que hemos creado la tabla de valores, representamos los puntos en el gráfico Y, finalmente unimos los puntos y trazamos una línea entre ellos:





En el siguiente video pueden observar mejor como graficar las funciones lineales y qué es un plano cartesiano: https://www.youtube.com/watch?v=edE5Y1kOgFw

y en el siguiente video podrán ver como graficar una función cuadrática:

https://www.youtube.com/watch?v=gnAdna_tLK0

- El dominio de una función real son todos los valores de x en los que existe la función. El dominio de una función se representa con la expresión *Dom f.*
- El recorrido de una función, o imagen de una función, son todos los valores de *f(x)* donde existe la función. El recorrido de una función se representa con la expresión: *Im f.*

<u>Otros tipos de funciones:</u>

- **<u>Funciones exponenciales</u>**: funciones en las que la incógnita x forma parte del exponente de una potencia.

En matemáticas, las funciones exponenciales son aquellas funciones que tienen la variable independiente x en el exponente de una potencia. Es decir, son de la siguiente forma:

$$f(x) = a^x$$

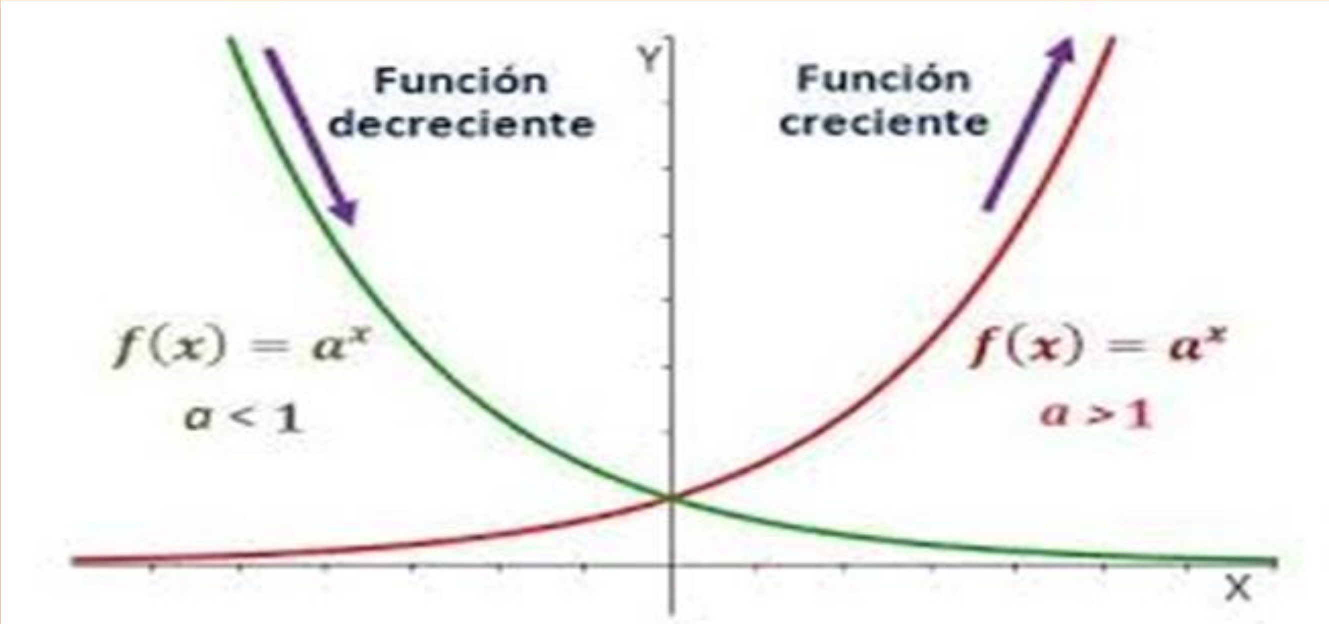
Donde a es un número real positivo y diferente de 1.

Las siguientes funciones son ejemplos de funciones exponenciales:

$f(x)=3^x$ $\qquad$ $f(x)=4^x$

El dominio de una función exponencial son todos los números reales. Sin embargo, la función solo toma valores positivos, por lo tanto, el recorrido o rango de una función exponencial son todos los números reales positivos.

Si la base de la potencia (a) es mayor que 1 la función exponencial es creciente. Por lo contrario, si el coeficiente a está dentro del intervalo entre 0 y 1 la función exponencial es decreciente.



Representación gráfica de una función exponencial:

Vamos a ver cómo graficar una función exponencial en un gráfico mediante un ejemplo.

Representaremos la siguiente función exponencial:

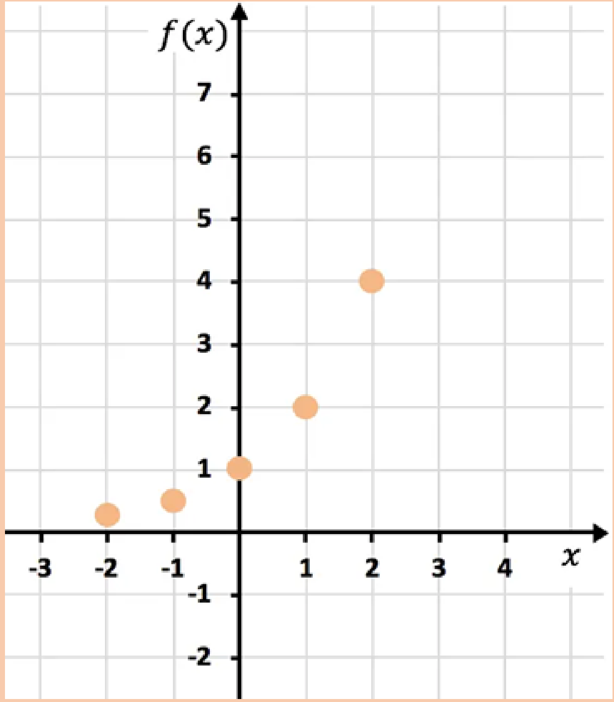
$$f(x)=2^x$$

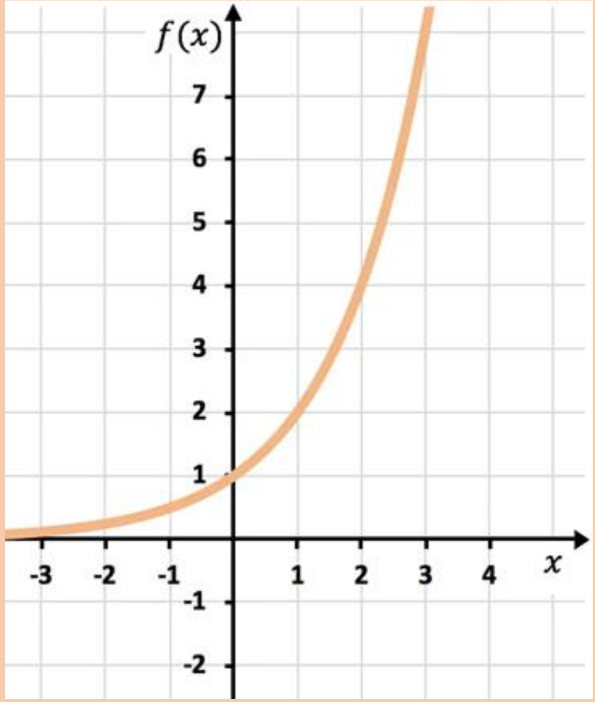
Por tanto, simplemente tenemos que hacer la tabla de valores.

$$x = 0 \longrightarrow f(0) = 2^0 = 1$$
$$x = 1 \longrightarrow f(1) = 2^1 = 2$$
$$x = 2 \longrightarrow f(2) = 2^2 = 4$$
$$x = -1 \longrightarrow f(-1) = 2^{-1} = 0,5$$
$$x = -2 \longrightarrow f(-2) = 2^{-2} = 0,25$$

x	$f(x)$
0	1
1	2
2	4
-1	$0,5$
-2	$0,25$

Ahora representamos los puntos en un gráfico y finalmente unimos los puntos y alargamos la función.





Funciones Logarítmicas:

En matemáticas, las funciones logarítmicas son aquellas funciones cuya variable independiente x forma parte del argumento de un logaritmo. Es decir, son de la siguiente forma:

$$f(x)= \log_a x$$

Donde a es obligatoriamente un número real positivo y diferente de 1.

Por ejemplo, la siguiente función es logarítmica: $f(x)= \log_5 x$

BLOQUE 4: ESTADISTICA Y PROBABILIDAD

La *estadística* es una rama de las matemáticas que te permite recopilar, organizar y analizar datos según la necesidad que tengas.

Probabilidad: Cálculo matemático de las posibilidades que existen de que una cosa se cumpla o suceda al azar.

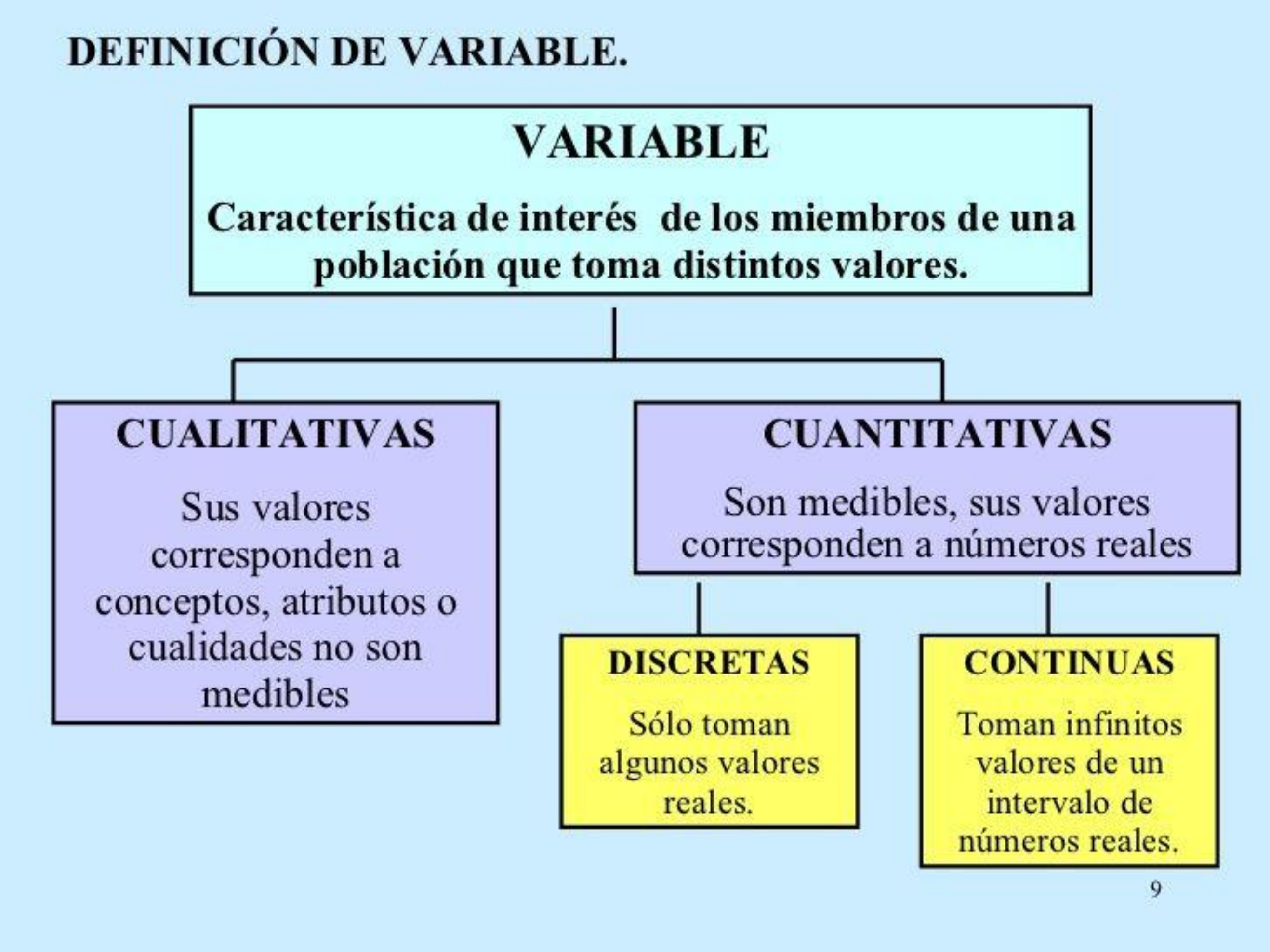


TABLA DE FRECUENCIA:

Una tabla de frecuencias muestra de forma ordenada un conjunto de datos estadísticos y a cada uno de ellos le asigna una frecuencia que, en pocas palabras, son las veces que se repite un número o dato.

Tipos de frecuencias:

Frecuencias absolutas: son el número de veces que se repite un número en un conjunto de datos.

Frecuencias absolutas acumuladas: es la suma de las frecuencias absolutas.

Frecuencia relativa: corresponde a las veces que se repite un número en un conjunto de datos respecto al total, pero se expresa en porcentajes (%).

Frecuencia relativa acumulada: es la suma de las frecuencias relativas.

Medidas de posición:

Las medidas de posición son aquellas en donde puedes dividir los datos en dos partes iguales, llamada **mediana**, lo puedes dividir en cuatro partes iguales llamado **cuartiles**, en diez partes iguales llamados **deciles** y en **percentiles** dividir en 100 partes iguales.

MEDIDAS DE DISPERSION

- ✓ **Las Medidas de Dispersión, muestran la variabilidad de una distribución, indicando por medio de un número si las diferentes puntuaciones de una variable están muy alejadas de la media.**
- ✓ **Las medidas de dispersión nos informan sobre cuánto se alejan del centro los valores de la distribución.**

Ejemplos comunes de medidas de dispersión estadística son la varianza y la desviación estándar.

<u>Media Aritmética</u>: También conocida como promedio o media, podemos definirla como aquel valor que se obtiene cuando se suman todos los datos de un análisis estadístico y se dividen por la cantidad total de datos.

<u>Moda</u>: es el valor que aparece con mayor frecuencia en un conjunto de datos.