Capítulo **10**

Geometría: coseno, seno y tangente de ángulos agudos; algunos valores sin calculadora; propiedades; relación entre la pendiente de una recta y la tangente del ángulo agudo que forma con el eje de las abscisas.

Razones trigonométricas

1. Simón tiene 3 años y le da miedo deslizarse por los toboganes. Julia, su mamá, quiere comprarle uno para ayudarlo a perder ese miedo. En una juguetería le dieron este folleto. Resuelvan las consignas en parejas.

MODELO 1

¡Llegaron nuevos toboganes!

Modelo 1: 1 m de altura y 2,5 m de largo.
Modelo 2: 0,5 m de altura y 1,5 m de largo.
Modelo 3: 0,5 cm de altura y 1 m de largo.

a. ¿Cuál elegirían para Simón? ¿Por qué?

....

b. ¿En cuál piensan que Simón tendrá más miedo? ¿Por qué?

....

Ángulo de inclinación

2. Teniendo en cuenta el folleto de la actividad 1, decidí con un compañero cuáles de estas afirmaciones son correctas. Expliquen sus respuestas en la carpeta.

a. El tobogán modelo 3 es más empinado que el modelo 2, porque tiene la misma altura y su rampa es más corta.

b. El tobogán modelo 1 es más empinado que el modelo 3, porque es más alto y su rampa es más larga.

c. El ángulo que forma la altura con la rampa del tobogán modelo 2 tiene mayor amplitud que el ángulo que forma la altura con el tobogán modelo 3, porque ambos tienen la misma altura, pero la rampa del modelo 2 es más larga.

3. Julia compró el tobogán modelo 3, pero a Simón le resultó muy chiquito. Cuando volvió al negocio, pidió otro tobogán que fuera igual de empinado. El vendedor le dijo que tenía dos modelos así y le mostró un folleto. En parejas, completen los datos que faltan.

Número de modelo	Altura (en metros)	Largo de la rampa (en metros)
4	0,75	
5		2,20

4. También tienen el modelo 6, con una altura de 1,75 m y 5,25 m de largo. Decidí si tiene la misma inclinación que alguno de los modelos de la primera actividad. Justificá tu decisión en la carpeta.

5. Para comparar la inclinación de dos toboganes, Mauro calculó cuánto descendía de altura cada tobogán en un recorrido de 1 m sobre la rampa. Explicá cómo se pueden usar esos números para comparar las inclinaciones.

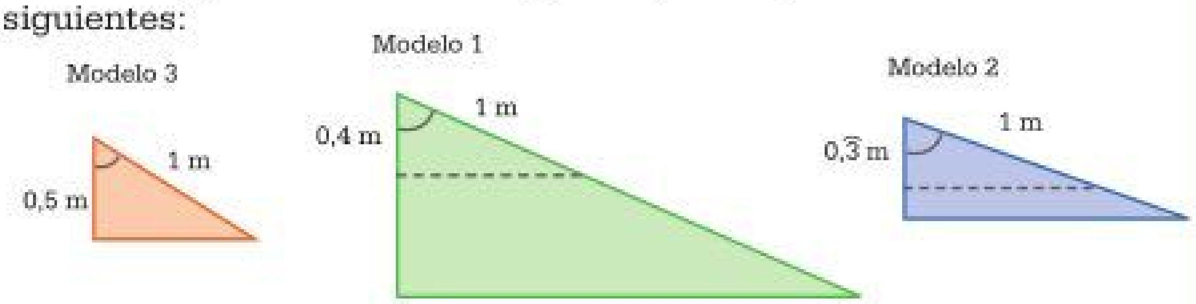
6. a. Completá la tabla considerando todos los modelos.

Número de modelo	1	2	3	4	5	6
Altura del tobogán (en m)	1	0,5	0,5	0,75		1,75
Largo de la rampa del tobogán (en m)	2,5	1,5	1		2,20	5,25
Altura que se desciende por metro recorrido sobre la rampa (en m)						

b. Teniendo en cuenta la última fila de la tabla, ordená los toboganes del más empinado al menos empinado.

....

En las dos actividades anteriores compararon la inclinación de los toboganes calculando cuánto se descendía en cada uno por cada metro recorrido sobre la rampa del tobogán. Para hallar este valor se puede calcular el cociente entre la medida de la altura del tobogán y la medida del largo de la rampa. Cuanto mayor sea ese número, más empinado es el tobogán, porque para igual distancia recorrida (1 metro), el descenso de altura es mayor. Ordenando los toboganes del más empinado al menos empinado, los esquemas serían los siguientes:



Llamaremos **ángulo de inclinación** del tobogán al ángulo formado entre la rampa del tobogán y la vertical.

7. Decidan en parejas si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifiquen sus decisiones en la carpeta.

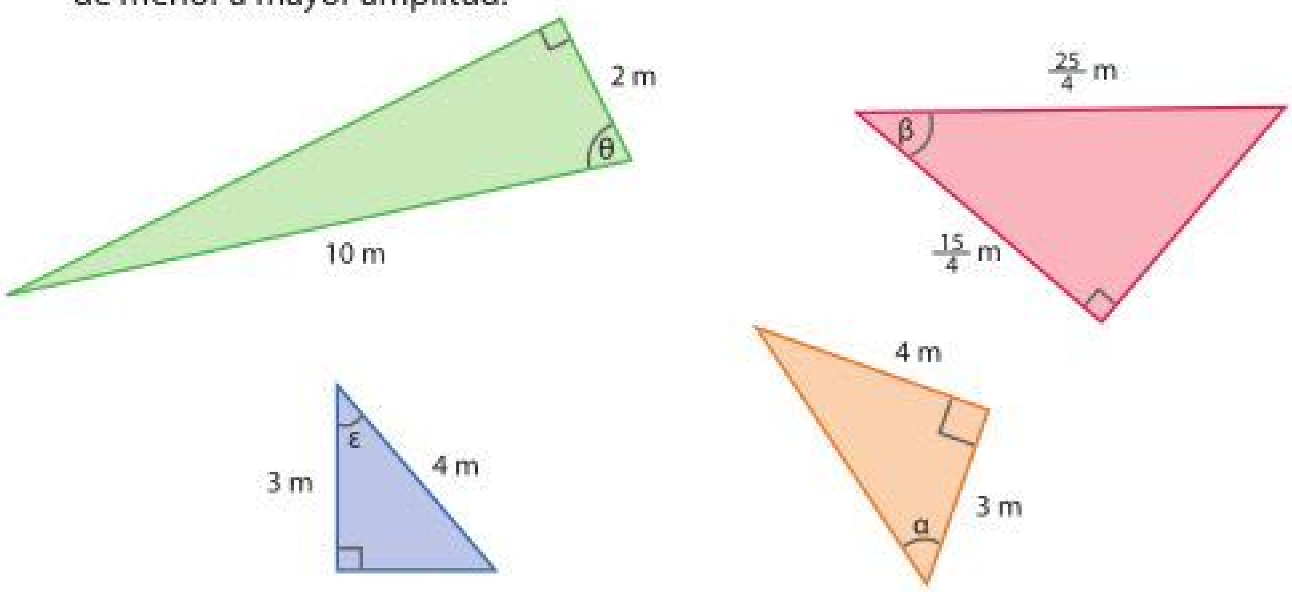
a. Un tobogán es más empinado que otro si el ángulo de inclinación es mayor.

b. Si en un tobogán se desciende más altura que en otro por metro recorrido sobre la rampa, su ángulo de inclinación también es mayor.

c. Si las rampas de dos toboganes tienen el mismo largo y el mismo ángulo de inclinación, entonces su altura también es la misma.

d. Si dos toboganes tienen la misma altura y sus rampas son del mismo largo, entonces su ángulo de inclinación es el mismo.

8. Teniendo en cuenta los datos de estos triángulos, ordená los ángulos α, β, ε y θ de menor a mayor amplitud.



Coseno de un ángulo agudo

Dado un ángulo α de un triángulo rectángulo, se llama **coseno de α** al cociente entre la medida del cateto adyacente a α y la medida de la hipotenusa. La igualdad también se puede escribir como:

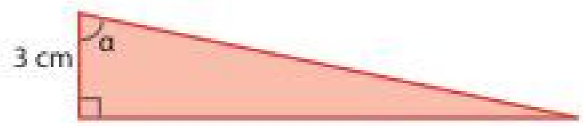
$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

Esta razón es la misma para cualquier triángulo rectángulo que tenga un ángulo de la misma amplitud que α.
En la actividad 6 tuvieron que calcular la altura que se desciende por metro recorrido sobre la rampa para cada tobogán, ese valor coincide con el coseno del ángulo de inclinación.

Recuerden que en un triángulo rectángulo los **catetos** son los lados que determinan el ángulo recto y la **hipotenusa** es el lado opuesto al ángulo recto. Además, para cada ángulo agudo de un triángulo rectángulo, se llama **cateto opuesto** al lado opuesto a ese ángulo y **cateto adyacente** al otro cateto.

9. Para cada triángulo se sabe que cos α = 0,2. Calculá las medidas de los otros dos lados.

a.

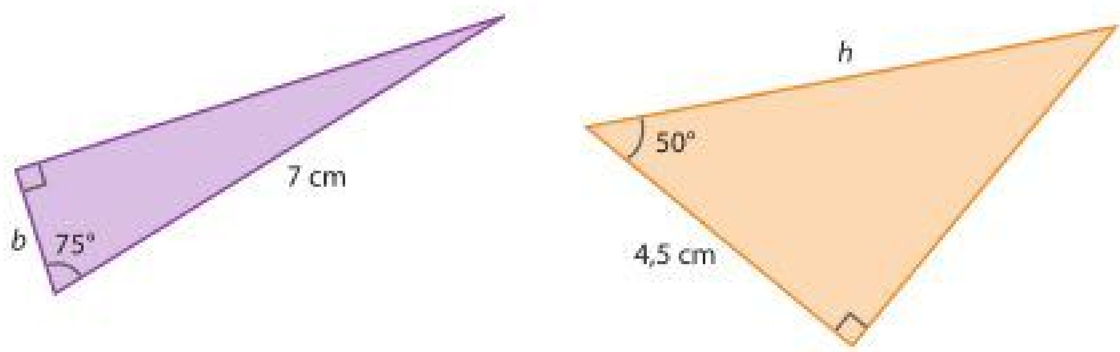


b.

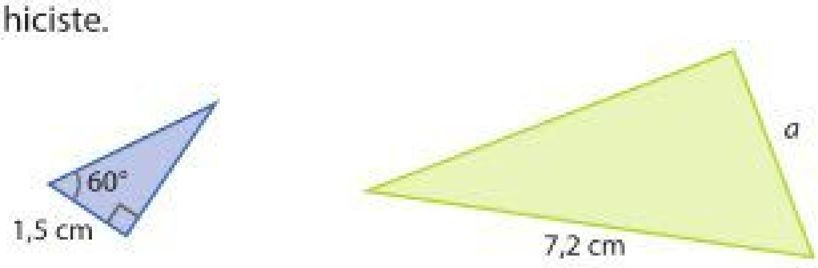
....

....

10. En tu carpeta, calculá la medida del lado *b* del triángulo violeta y la medida de la hipotenusa *h* del triángulo anaranjado.



11. Estos dos triángulos son semejantes. Calculá la medida del lado *a* y explicá cómo lo hiciste.



12. Verificá tu respuesta de la segunda consigna de la actividad 6 hallando con la calculadora una amplitud aproximada de cada ángulo de inclinación.

13. Calculá, aproximadamente, la amplitud de los ángulos α, β, ε y θ de la actividad 8, y verificá si tu respuesta fue correcta.

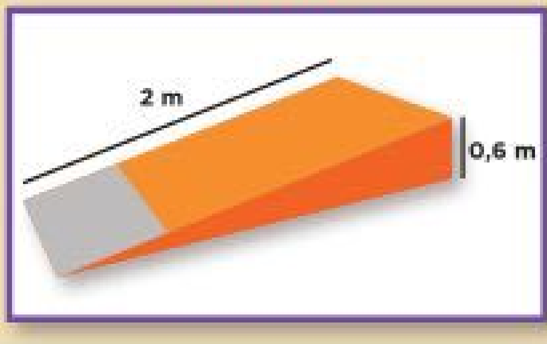
Para que la calculadora identifique que se ingresan ángulos en grados, hay que trabajar en modo *deg*. Esta es la abreviatura de *degrees*, que significa "grados" en inglés.
Para calcular el **coseno** de un ángulo, presionen COS, luego ingresen el valor de su amplitud y, finalmente, =.

Si conocen el coseno de un ángulo y quieren hallar la amplitud, presionen SHIFT, luego COS, ingresen la amplitud y aprieten =.

Seno y tangente de un ángulo agudo

14. Ciro anda en patineta y quiere aprender a deslizarse por las rampas. El papá quiere regalarle una para principiantes y le dieron un folleto con estos modelos. Resuelvan las consignas en parejas.

MODELO 1



Rampas disponibles:

Modelo 1: 0,6 m de altura y 2 m de largo.
Modelo 2: 0,5 m de altura y 1 m de largo.
Modelo 3: 0,9 m de altura y 3 m de largo.
Modelo 4: 0,8 m de altura y 2,3 m de largo.

a. ¿Cuál le comprarían a Ciro? ¿Qué tuvieron en cuenta para elegirla?

....

b. Con los datos del folleto, ¿es posible obtener la amplitud del ángulo entre la rampa elegida y el piso? Si es posible, hallen esa amplitud para cada rampa.

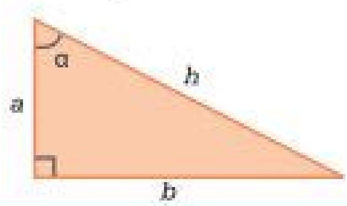
....

En las páginas anteriores identificaron que en un triángulo rectángulo la razón entre la medida de dos de sus lados es un valor útil para averiguar la medida de uno de sus ángulos o de sus lados. Además del coseno, hay otras razones: el seno y la tangente. Dado un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, el **seno** del ángulo es la razón entre el cateto opuesto a ese ángulo y la hipotenusa, y la **tangente** del ángulo es la razón entre el cateto opuesto a ese ángulo y el cateto adyacente a él. Estos cocientes son las **razones trigonométricas** y se escriben así:

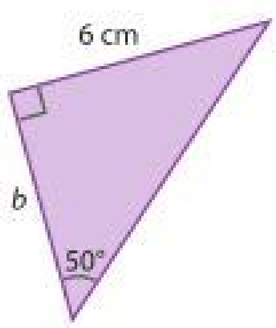
$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{h}$$

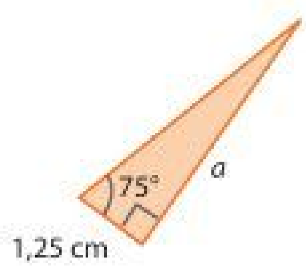
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{h}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha} = \frac{b}{a}$$



15. Hallá la medida del lado *b* del triángulo violeta y la medida del lado *a* del anaranjado. Explicá qué razón trigonométrica usaste y por qué la elegiste.





Para hallar el seno de un ángulo hay que presionar SEN, luego ingresar el valor de su amplitud y, finalmente, =.

16. Para cada rampa de la actividad 14, hallá la amplitud del ángulo que forma la rampa y el piso utilizando el seno del ángulo. Verificá que las amplitudes sean las mismas que las obtenidas anteriormente.

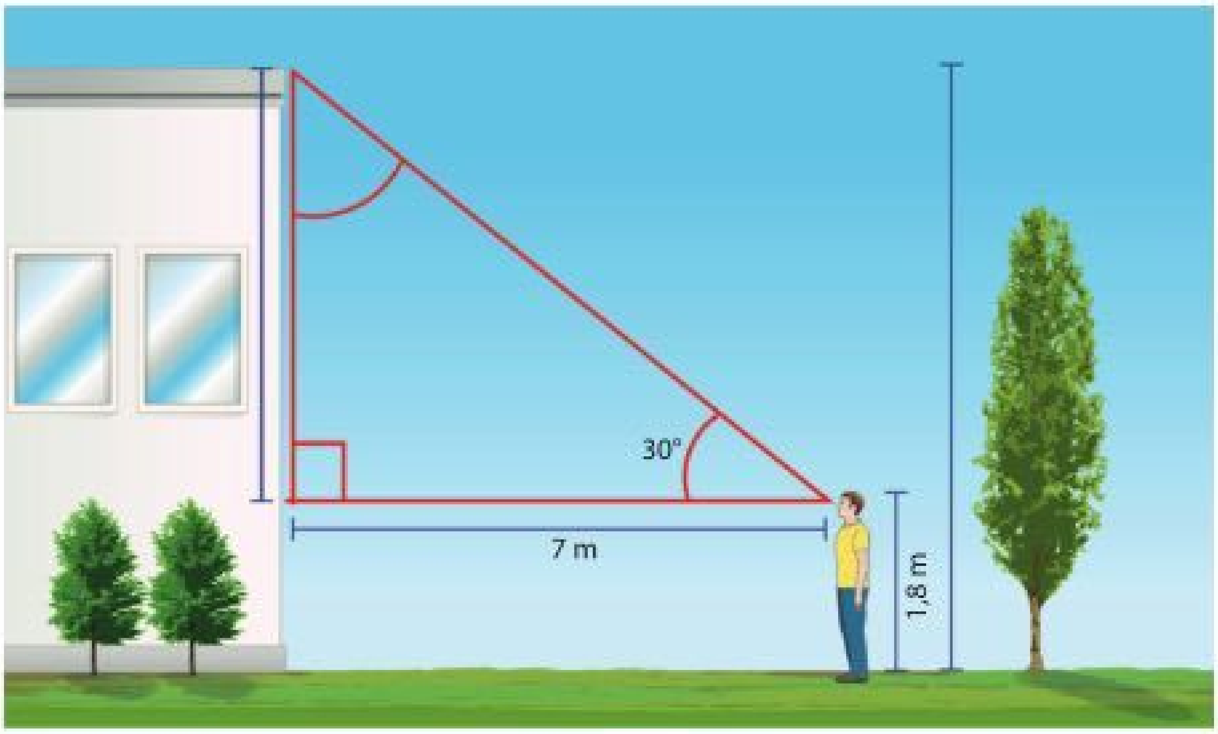
17. Julián apoyó una escalera de 3,5 metros de largo de tal manera que el pie de la misma quedó a 2 metros de la pared.

a. ¿Cuál es la amplitud del ángulo que forma la escalera con el piso?

b. Si una escalera se apoya en el piso muy alejada de la pared, es insegura y se puede caer. Los pintores dicen que, como máximo, se puede alejar 1 metro por cada 4 metros de altura. Siguiendo ese criterio, ¿dirías que la manera en que la apoyó Julián es segura? ¿Cuál es la amplitud mínima del ángulo entre la escalera y el piso que aconsejan los pintores?

Si conocen el seno de un ángulo y quieren hallar la amplitud, presionen SHIFT, luego SEN, ingresen la amplitud y aprieten =.
Para hallar la amplitud de un ángulo conociendo la tangente se procede de manera similar usando la tecla TAN.

18. Miguel quería calcular, aproximadamente, la altura de esta casa. Resuelvan las consignas en parejas.



a. Se ubicó a 7 metros y miró hacia el techo con un ángulo aproximado de 30°. Si él mide 1,8 metros, ¿cómo puede estimar la altura de la casa? ¿Cuánto mide la casa según Miguel?

b. El arquitecto le dijo que la casa medía 6,8 metros. ¿Con qué ángulo, en realidad, miró Miguel?

19. Para cada caso, decidí con un compañero si existe un triángulo rectángulo que cumpla lo pedido. Justifiquen sus decisiones.

a. Tiene un ángulo δ que cumple sen $\delta = \frac{4}{5}$, el cateto opuesto a δ mide 16 cm y la hipotenusa mide 20 cm.

b. Tiene un ángulo θ que cumple cos $\theta = \frac{7}{5}$.

c. Tiene un ángulo φ que cumple tg $\varphi = \frac{2}{3}$, el cateto opuesto a φ mide 3 cm y el cateto adyacente a φ mide 4,5 cm.

Algunas razones trigonométricas sin calculadora

20. Resuelvan las consignas en parejas.

a. Argumenten por qué tg (45°) = 1.

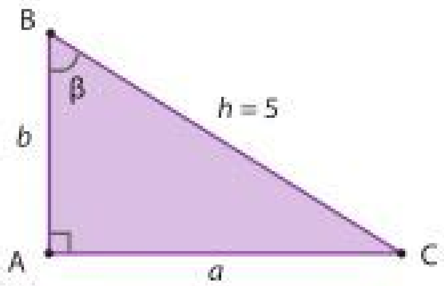
b. Argumenten por qué cos (45°) = $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

c. Hallen el valor de sen (45°) sin usar la calculadora.

Para la primera consigna, pueden pensar en un triángulo rectángulo con un ángulo de 45°. Para la segunda, pueden pensar en un triángulo rectángulo en el cual el cateto adyacente al ángulo de 45° mide 1 cm.

21. Argumentá por qué la igualdad $\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \text{tg } \alpha$ se cumple para cualquier ángulo agudo α de un triángulo rectángulo.

22. En parejas, consideren todos los triángulos ABC cuya hipotenusa mida 5 cm. Resuelvan las consignas en la carpeta.



a. Hallen cos β para $b = 1$, $b = 0{,}5$ y $b = 0{,}1$.

b. Hallen cos β para $b = 4{,}5$, $b = 4{,}9$ y $b = 4{,}99$.

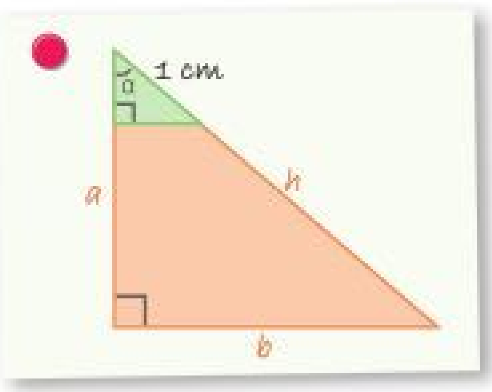
c. ¿Qué valores le asignarían a cos (0°)? ¿Y a cos (90°)? Expliquen por qué.

d. ¿Qué valores le asignarían a sen (0°)? ¿Y a sen (90°)? Expliquen por qué.

En *http://goo.gl/fYLQub* pueden encontrar un archivo de GeoGebra diseñado para explorar la situación de esta actividad.

23. Usando lo trabajado en esta página, averiguá sin calculadora los valores de tg (0°) y tg (90°).

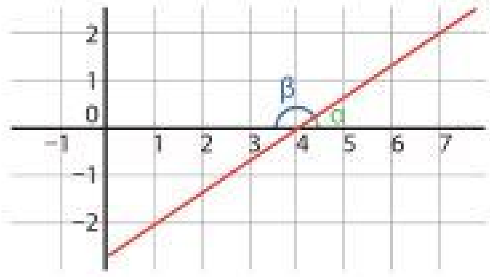
24. Sofía leyó en un libro que para cualquier ángulo α de un triángulo rectángulo siempre se cumple la igualdad $(\cos \alpha)^2 + (\text{sen } \alpha)^2 = 1$. Para argumentarlo dibujó un triángulo cualquiera, luego un triángulo semejante con una hipotenusa de 1 cm y, finalmente, usó el teorema de Pitágoras. En parejas, piensen cómo pudo seguir Sofía su argumentación.



25. Utilizando la relación de la actividad anterior y sabiendo que sen (30°) = $\frac{1}{2}$, justificá, sin calculadora, que cos (30°) = $\sqrt{\frac{3}{4}}$.

Relación entre la pendiente de una recta y la tangente de un ángulo

26. En parejas, calculen las amplitudes de α y β, dos de los ángulos que forma la recta con el eje *x*.



27. León y Olivia tenían que resolver este problema.

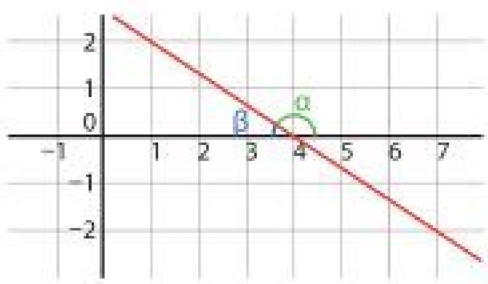
Dada la ecuación de la recta: $-4\,x + 5\,y = -16$, averiguá la tangente del ángulo agudo que forma la recta con el eje de las abscisas.

León
Yo despejé la *y* de la igualdad y con eso obtuve la pendiente de la recta. Ese es el valor de la tangente del ángulo pedido.

Olivia
Yo grafiqué la recta, inventé un triángulo rectángulo, calculé las medidas de sus catetos e hice el cociente entre ellas.

En parejas, decidan en la carpeta si las respuestas de León y Olivia son correctas. Si alguna no lo es, expliquen por qué. Si alguna lo es, hallen la tangente del ángulo siguiendo la estrategia y, luego, calculen la amplitud de ese ángulo.

28. Calculá la amplitud de estos dos ángulos que forma la recta con el eje *x*.



En estas actividades relacionaron la tangente de un ángulo y la pendiente de una recta. Si una recta tiene pendiente positiva, el valor de esta coincide con la tangente del ángulo agudo que forma la recta con el eje de las abscisas. Si la recta tiene pendiente negativa, el opuesto de ese valor corresponde a la tangente del ángulo agudo que forma la recta con el eje de las abscisas.

29. Calculá la amplitud de los ángulos que forman estas rectas con el eje *x*.

a. $-3\,x + 4\,y = 7$

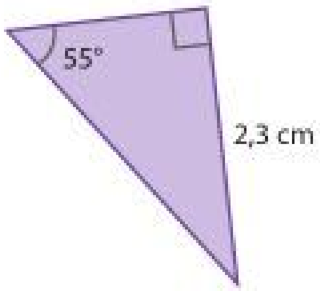
b. $2\,x + 3\,y = 4$

30. Hallen la ecuación de una recta que pase por el punto (3 ; 4) y forme un ángulo de 45° con el eje *x*.

Más actividades

1. Para cada triángulo, calculá la medida de los lados y la amplitud de los ángulos.

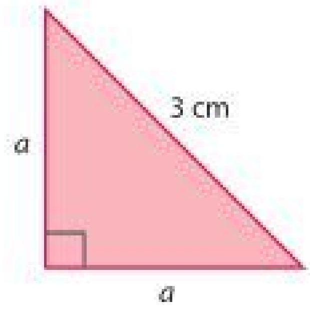
a.



b.

c.

d.



2. Para cada caso, decidí si existe un triángulo rectángulo que cumpla lo pedido. Si existe, decidí cuántos triángulos lo cumplen. Si no existe, explicá por qué.

a. Tiene un ángulo α que cumple $\cos \alpha = \frac{3}{4}$.

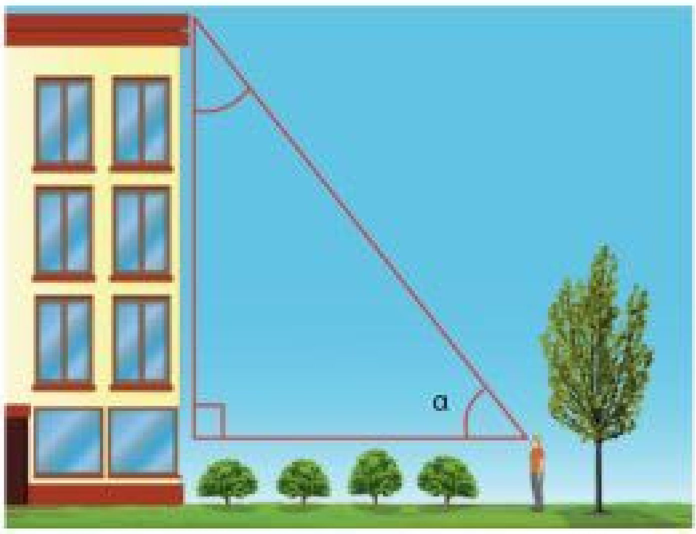
b. Tiene un ángulo β que cumple $\operatorname{sen} \beta = 1$.

c. Tiene un ángulo γ que cumple $\operatorname{sen} \gamma = \frac{5}{8}$, el cateto opuesto a γ mide 15 cm y la hipotenusa, 24 cm.

d. Tiene un ángulo φ que cumple $\operatorname{tg}(\varphi) = 1$ y el triángulo no es isósceles.

3. El lado desigual de un triángulo isósceles mide 15 cm y la altura correspondiente a ese lado mide 4 cm. ¿Cuánto miden, aproximadamente, sus ángulos?

4. El edificio de Lucas mide 13 metros. A una distancia de 9 metros del edificio, Lucas mira la terraza. Sabiendo que él mide 1,8 metros, averiguá la amplitud del ángulo α.

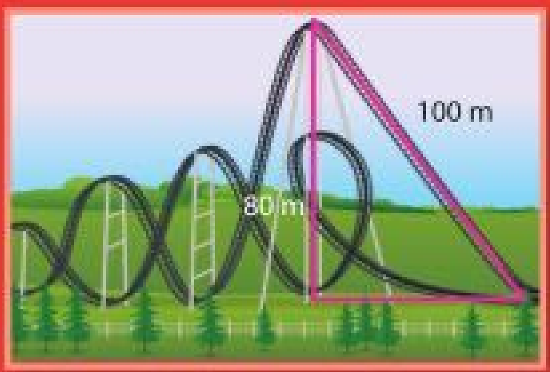


5. Analizá si se puede averiguar la medida de las tres alturas de este triángulo. En caso de no poder hallar alguna, explicá por qué no es posible.

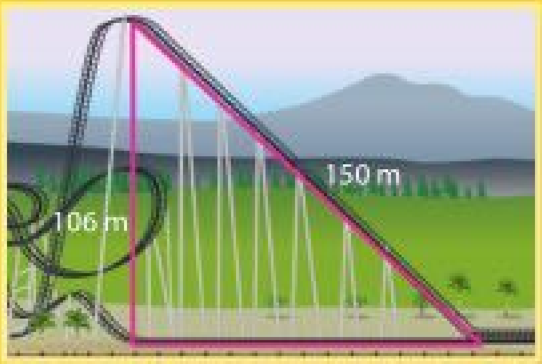
6. Un avión despega formando un ángulo α con el piso. Calculá la amplitud de α sabiendo que, después de recorrer 8.000 m en el aire en línea recta, el avión está a 4.500 m de altura.

7. Se eligieron cuatro montañas rusas para estudiar el tramo recto desde la máxima altura hasta el final del descenso. Usá los siguientes datos para ordenar de mayor a menor las cuatro montañas rusas según lo indicado en cada caso.

Montaña rusa A



Montaña rusa B



Montaña rusa C

Altura: 97 m.

Ángulo de inclinación: 70°.

Montaña rusa D

Ángulo de inclinación: 65°.

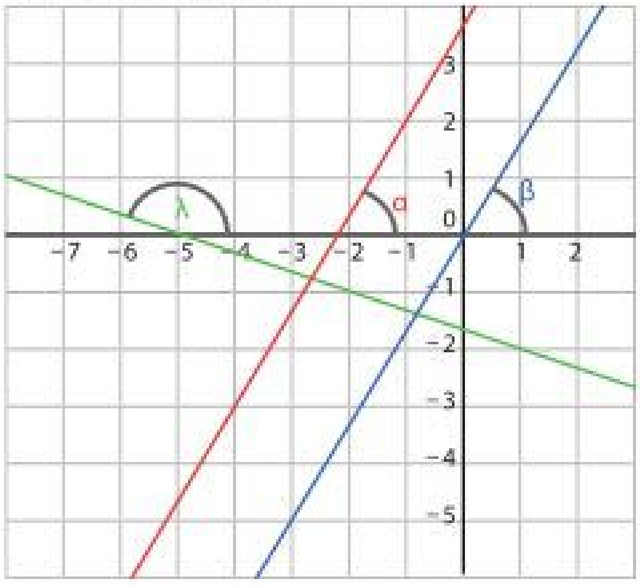
Longitud recorrida desde la máxima altura hasta el final del descenso: 330 m.

a. Mayor altura alcanzada.

b. Longitud recorrida desde su máxima altura hasta el final del descenso.

c. Ángulo de inclinación.

8. Hallá la amplitud de los ángulos λ, α y β.



9. Calculá la amplitud de los ángulos que forman estas rectas con el eje x.

a. $13y - 3x = -13$

b. $3y + x - 21 = 0$