ÁREA

MATEMÁTICA

SERIE I. CICLO BÁSICO
NIVEL SECUNDARIO
CORRIENTES 2023

ALGEBRA Y FUNCIONES

GOBIERNO PROVINCIAL

CORRIENTES
somos todos!

Ministerio de Educación

2022 LAS MALVINAS SON ARGENTINAS

Dirección de Planeamiento e Investigación Educativa

Dirección General de Nivel Secundario

AUTORIDADES PROVINCIALES

DR. GUSTAVO VALDÉS
GOBERNADOR DE CORRIENTES

LIC. PRÁXEDES YTATÍ LÓPEZ
MINISTRA DE EDUCACIÓN

DR. JULIO CÉSAR DE LA CRUZ NAVÍAS
SUBSECRETARIO DE GESTIÓN EDUCATIVA

DRA. PABLA MUZZACHIODI
SECRETARIA GENERAL

PROF. SERGIO JOSÉ GUTIERREZ
DIRECTOR GENERAL DE NIVEL SECUNDARIO

LIC. JULIO FERNANDO SIMONIT
DIRECTOR DE PLANEAMIENTO
E INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

COMISIÓN REDACTORA

PROF. **EDITH NOEMÍ GOROSTEGUI**
PROF. **DIEGO FRANCISCO VILOTTA**
PROF. **MARÍA ITATÍ GÓMEZ**

DISEÑO & ARMADO:
REINA a CABALLO

INTRODUCCIÓN

Uno de los ejes de contenidos del Diseño Curricular Jurisdiccional de la Provincia de Corrientes, para el **Ciclo Básico** del Nivel Secundario, corresponde al de **Álgebra y Funciones.** Al respecto, se enuncian las expectativas que se pretenden alcanzar:

1er AÑO:

- *Utilizar los símbolos y representaciones gráficas para expresar relaciones, en especial las funciones de proporcionalidad en situaciones concretas y en diversos contextos, iniciando gradual y paulatinamente el proceso de modelización matemática.*

EN 2do AÑO:

- *Utilizar los símbolos y representaciones gráficas para expresar generalizaciones, relaciones y funciones en diversos contextos, continuando progresivamente con el proceso de modelización matemática iniciado.*

En 3er año:

- *Explorar regularidades, argumentar sobre la validez de las fórmulas que dan cuenta de dichas regularidades.*
- *Modelizar las variaciones lineales expresadas mediante gráficos y/o fórmulas, en situaciones problemáticas de diferentes contextos.*

Se espera que los profesores propongan situaciones problemáticas que requieran entre otros aspectos:

- *Modelizar variaciones uniformes y expresarlas eligiendo la representación más adecuada a la situación.*
- *Enunciar fórmulas para representar regularidades numéricas en N y analizar sus equivalencias.*
- *Interpretar relaciones entre variables en tablas, gráficos y fórmulas en diversos contextos (regularidades numéricas, proporcionalidad directa e inversa).*
- *Explorar, conjeturar y validar sobre las propiedades de las funciones de proporcionalidad directa (variación uniforme, origen en el cero).*
- *Expresar algebraicamente de diferentes maneras, estableciendo posteriormente las equivalencias que definen la situación concreta, diferenciándolas de las que derivan de las propiedades numéricas establecidas.*

Este **primer documento** se centrará en situaciones problemáticas que implican modelizaciones algebraicas, en particular la producción de fórmulas para representar regularidades numéricas, situado en el terreno del álgebra y sus relaciones con la aritmética, atendiendo a que la experiencia principal de los estudiantes del nivel secundario se encuentra en el campo de la aritmética y es sobre la base de estos conocimientos que se construirán los algebraicos. En un **segundo documento** se focalizará el estudio matemático de estos temas, para el Ciclo Orientado y se avanzará con los contenidos referidos a las funciones.

SOBRE EL ESTUDIO DE LA VARIACIÓN LINEAL Y CUADRÁTICA EN CONTEXTOS ARITMÉTICOS

Las propuestas de trabajo para el nivel secundario de los últimos años, tanto en los materiales de desarrollo curricular como en los libros de textos, plantean la necesidad de pensar la enseñanza en términos de articulaciones y pasajes de un conocimiento a otro. Este pasaje no sucede sin dificultades para los estudiantes, se trata de obstáculos epistemológicos, es decir relativos al conocimiento mismo que, una vez superados, serán la "muestra" del aprendizaje de un nuevo conocimiento. Uno de los importantes, es el pasaje de los modelos lineales a los modelos cuadráticos y que, incluso, tienen una raíz ya en la escuela primaria, en el tratamiento del producto de números naturales.

Ahora bien, para diseñar o seleccionar propuestas de enseñanza, se puede partir de problematizar esa articulación, tarea que conduce a analizar el comportamiento de modelos cuadráticos a diferencia de los lineales, tanto desde el punto de vista de la matemática involucrada en ambos, como desde las concepciones de los estudiantes de secundaria, respecto de los modelos lineales al momento de enfrentarse a problemas que involucran modelos cuadráticos. Así también, es necesario preguntarse qué conocimientos requieren los estudiantes para tratar con los problemas que varían cuadráticamente y al mismo tiempo en qué medida los conocimientos sobre "lo lineal" pueden influir en la construcción conceptual de "lo cuadrático".

En la búsqueda de respuestas y teniendo en cuenta los conocimientos previos posibles de los estudiantes, se encuentran filiaciones en el campo de la aritmética con el pasaje de la adición a la multiplicación de números naturales, al igual que con la variación del área de figuras como el rectángulo, en función de sus lados. Asimismo, los problemas de conteo de colecciones, son otro contexto apropiado para tratar este pasaje, como se verá en este documento.

En el tratamiento de la multiplicación en la escuela -sobre todo la escuela primaria- se prioriza, en general, el algoritmo de resolución y no sus propiedades. Por otro lado, definir a la multiplicación como una suma reiterada - como sucede en muchos casos - enfatiza aún más la dificultad de los estudiantes para distinguir las diferencias de funcionamiento entre estas dos operaciones.

Del mismo modo, el tratamiento del área se centra en su fórmula de cálculo y no es frecuente el estudio de su variación en función de la variación de los lados. Se puede señalar la importancia de analizar, por ejemplo, la co-variación del perímetro y área de rectángulos. En particular, establecer que el área varía linealmente (proporcional) en cada variable, pero no es así al hacer variar las dos dimensiones involucradas en el cálculo; si, por ejemplo, se duplican los lados en un rectángulo, el perímetro se incrementará en la misma proporción, es decir se duplicará, sin embargo, el área no variará de la misma manera, sino que se cuadruplicará.

Otros tipos de problemas que permiten el trabajo con lo lineal y lo cuadrático, son aquellos en los que se trata de contar colecciones. Son actividades que habilitan, en principio, una introducción al álgebra vía la generalización y se centran en encontrar una fórmula para determinar el total de elementos en el lugar "n" de una colección que ha sido construida iterativamente siguiendo una cierta regularidad. Estos problemas pueden aludir a variaciones lineales o cuadráticas, dependiendo precisamente de la regularidad en cómo se conforma cada colección al hacer variar algún elemento de la misma.

Es interesante proponer a los estudiantes este tipo de problemas y analizar las diferencias entre uno y otro tipo de variación y no de manera independiente tal como se realiza habitualmente.

En este documento se incluye y analiza una secuencia de actividades alrededor de un problema de conteo de colecciones que varía linealmente, así como otras variantes del mismo incorporando además, respuestas probables de los estudiantes a los problemas, a modo de anticipación de los posibles para las clases. Así también, se analizan algunas cuestiones sobre la gestión de la clase, a partir de los registros de éstas, donde se trabajó con este problema y las respuestas, con el objetivo de aportar información sobre lo que sucede efectivamente en las aulas y el modo de gestionar que es necesario considerar.

Se incorporan sugerencias de actividades que colaboran en este mismo sentido y que constituyen un preludio, necesario, a la discusión sobre las diferencias con los modelos cuadráticos.

A continuación, se plantea la comparación entre dos problemas de conteo de colecciones, en apariencia similares, con el objetivo de contrastarlos para elaborar conclusiones con los estudiantes, respecto de las diferencias entre los dos modelos, para luego profundizar sobre los modelos cuadráticos a partir de sugerencias de problemas para su tratamiento.

Finalmente, se dedica un apartado al análisis de actividades relacionadas con el producto de números naturales tal lo enunciado anteriormente para ilustrar la relación con este tema.

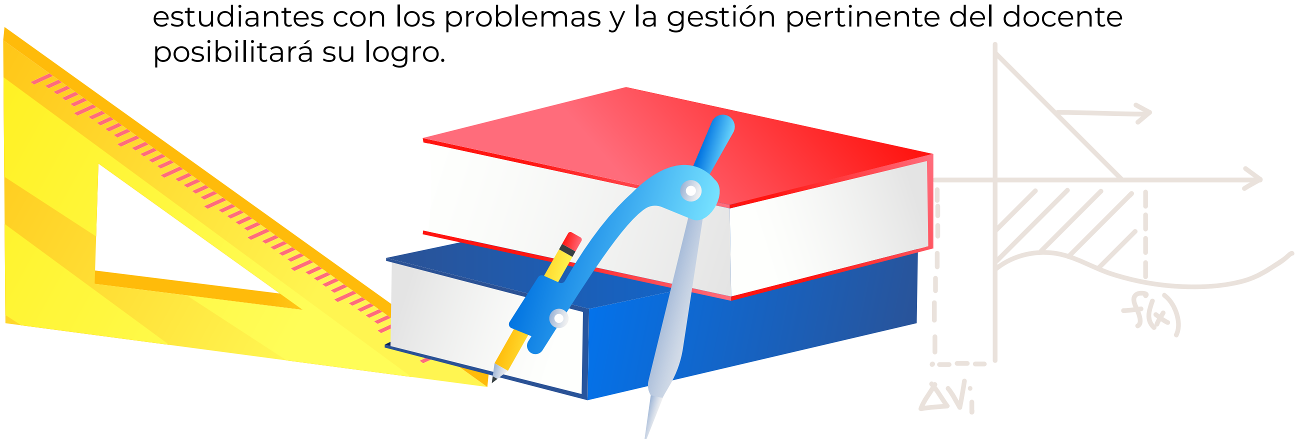
UN PRIMER PROBLEMA DE VARIACIÓN LINEAL

El trabajo con los estudiantes del secundario sobre el pasaje de lo lineal a lo cuadrático, es un largo camino que puede incluir en sus inicios la resolución de problemas, que impliquen también un pasaje de la aritmética al álgebra en contextos discretos como el que se plantea aquí.

En este primer problema, el objetivo es que los estudiantes aprendan a armar fórmulas para contar colecciones que respondan a un modelo lineal y puede tener distintas variantes en su diseño.

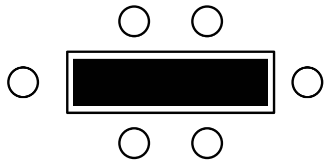
Es absolutamente necesario que continúen con otros problemas del mismo tema, antes de plantearles la resolución de otros que ya no se comportarían del mismo modo, sino que responderán a un modelo cuadrático.

Todos los problemas que se presentan, plantean una propuesta de aprendizaje, es decir, no hay una explicación previa por parte del docente ni desarrollos teóricos, sino que la interacción de los estudiantes con los problemas y la gestión pertinente del docente posibilitará su logro.

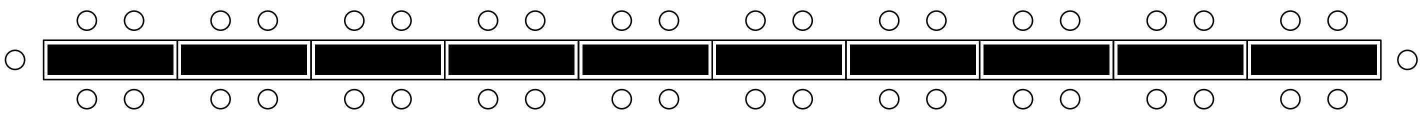


PROBLEMA 1

Fase 1: Familiarización con el problema
Consigna para los estudiantes: *En un lugar de alquiler para eventos se incluyen mesas y sillas como parte del alquiler y cada mesa tiene capacidad para 6 personas. En el siguiente esquema se representa la mesa con un rectángulo y con "°" cada una de los asientos, tal como se disponen en cada mesa:*



a) *Para el casamiento de Andrés y Lucía se disponen las mesas una a continuación de la otra como puede observarse en el siguiente esquema. Si la " ° " indica un asiento para una sola persona* ***¿cuántas personas podrán sentarse alrededor de estas mesas?***



b) Puesta en común de las producciones de los estudiantes.

c) *Si la cantidad de mesas fueran 31. Calcular cuántas personas podrán sentarse alrededor de las mesas.*

d) *Puesta en común de las producciones grupales.*

Fase 2: Formulación de un procedimiento de cálculo
Consigna para los estudiantes: *En la clase anterior se discutió y se acordó cuáles eran los métodos que servían para calcular la cantidad de personas que se pueden sentar alrededor de las 31 mesas. Ahora tienen que explicar por escrito cómo sería el método para calcular la cantidad de personas que se pueden sentar cualquiera sea la cantidad de mesas. Pueden usar una o varias frases.*

Fase 3: Escritura de una fórmula
Consigna para los estudiantes: *Ahora van a buscar una fórmula para poder calcular la cantidad de personas sentadas para cualquier cantidad de mesas. (Los grupos cuyas formulaciones han sido rechazadas trabajan sobre alguna de las otras formulaciones).*

Fase 4: Puesta en común y discusión sobre la pertinencia de las fórmulas producidas.

ANÁLISIS Y PUESTA EN PRÁCTICA
de las distintas fases en clases del secundario

Se analizan a continuación cada una de las decisiones tomadas en la secuencia indicada con Fases, junto con las posibles respuestas de los estudiantes y otras que efectivamente se dieron en una clase. Se aporta también información sobre el rol del docente en cada fase y fragmentos de discusiones llevadas a cabo en las mismas con el objetivo de aportar sugerencias sobre cómo discutir con los estudiantes a partir de sus ideas y respuestas.

La parte a) de la Fase 1 tiene por objetivo introducir a los estudiantes en una problemática y que comprendan claramente qué se espera de ellos[1]. Para esto se aporta un gráfico donde visualicen una representación de la situación, sobre la ubicación de los asientos alrededor de las mesas. En este problema tienen que determinar la cantidad de personas que puedan sentarse alrededor de las 12 mesas y para esto un recurso es contar una a una la cantidad de "°" representadas, o contar agrupando de cierta manera, por ejemplo, contar los asientos de un costado y multiplicar por 2 (24 . 2 = 48) y luego sumar los 2 de las cabeceras (48 + 2 = 50). Puede ser también relacionando la cantidad de mesas con la cantidad de asientos de la siguiente manera: contar la cantidad de mesas (12) y luego multiplicar por 2 (12 . 2 = 24) pues hay 2 por cada una, y luego volver a multiplicar por 2 para incluir los asientos del otro costado (24 . 2 = 48), finalmente sumar los de las cabeceras (48 + 2 = 50), etc.

Es importante que cada estudiante entre en contacto con el problema e intente producir una solución, para lo cual es necesario que lo enfrenten en forma individual, pero podría darse la consulta con un compañero[2].

Una vez que la mayoría haya obtenido una solución, se organiza una puesta en común con el objetivo de disipar dudas, respecto de cuestiones relacionadas con los datos y para socializar las distintas maneras de resolver, focalizados principalmente en aquellos estudiantes que se limitaron a contar uno a uno los "°". En este sentido es importante que tomen contacto con procedimientos en los que se relacionan la cantidad de asientos con la cantidad de mesas, como una oportunidad para orientarse en estos términos, como una referencia que posteriormente se les solicitará.

En cuanto al rol docente, en un principio debe limitarse a dar la consigna de trabajo y luego responder preguntas relacionadas con los datos o sobre la interpretación de los mismos, en ningún caso responder las que refieren a procedimientos de resolución, dado que esto debe quedar a cargo del estudiante. Ellos deben tomar las decisiones pertinentes para resolverlo y posteriormente validar lo producido, tal como se analiza a continuación, algo que puede hacerse desde el momento en que está claro cuál es la finalidad.

Luego de la resolución, se puede organizar una actividad colectiva, una puesta en común de los diferentes modos de resolución. Aquí el docente debe lograr que los estudiantes dialoguen sobre los procedimientos seleccionados y confrontarlos. Esta selección debe obedecer a criterios basados en presentar la mayor variedad posible de estrategias y no limitarse a dar la palabra a todos, sino en aquellos que aporten a la riqueza pedagógica necesaria para que estos avancen en sus aprendizajes. La experiencia muestra

[1]Que determinen la cantidad de personas sentadas.
[2]Por ejemplo, puede ser su compañero de banco.

que la mayoría de los estudiantes no escuchan a sus compañeros/as si se repite lo mismo varias veces y finalmente se tornan muy insuficientes los aprendizajes de la clase.

Se espera que las intervenciones de los estudiantes consistan en comparar los distintos procedimientos, a partir de una gestión del docente haciéndoles ver las ventajas y desventajas de unos y otros, realizando aclaraciones o pidiéndolas para el resto de la clase, haciendo preguntas, etc. En otras palabras, el/la profesor/a conduce la clase dando las consignas, pero también interactuando de una manera similar al resto, pero está claro que no es un estudiante más. La mayoría de sus preguntas no son para entender lo que ellos produjeron, sino para comunicar las cuestiones importantes relativas al conocimiento en juego, en este caso, las que corresponden a esta fase inicial.

En una clase donde se propuso esta actividad, lo que hicieron algunos estudiantes, fue efectivamente contar los círculos (representaciones de las sillas) y otros utilizaron cálculos. En la discusión colectiva la docente, confrontó el procedimiento de conteo uno a uno con las siguientes:

PROCEDIMIENTO 1

24 ⟶ **1** hilera
x2 ⟶ hileras
48
+2
50 ⟶ asientos

PROCEDIMIENTO 2

Sumé todas las sillas de 2 en 2 y me dió 50.

PROCEDIMIENTO 3

12 **x4** = **48**
48 **+2** = **50**

Rta.: 50 personas.

A continuación, se transcribe un pasaje de la confrontación llevada a cabo en la clase a partir de estos procedimientos:

D: *A ver este otro Melisa, ¿qué puede ser este 12 x 4? (refiriéndose al procedimiento 3). Este 48 que está acá: ¿por qué 12 y por qué por 4?*

Melisa: *12 capaz que son las mesas.*

D: *12 te parece que pueden ser las mesas, que acá son las mesas. Vamos a decir lo que pueden ser y después le preguntamos al que hizo, ¿sí? 12 pueden ser las mesas ¿Y qué puede ser este 4?*

Melisa: *Capaz hizo para hacer más fácil, fue contando de a 2 así… las mesas.*

D: *Capaz que fue contando de a 2 las mesas, como en una mesa hay 2 en un costado, en la otra mesa hay otros 2. O sea esta mesa 2 y esta otra mesa 2 más ¿te parece eso a vos José?*

José: *A mí me parece que pensó que en una mesa hay 4 sillas, 2 arriba y 2 de abajo.*

D: *Entonces los 2 que dice Melisa, no son los 2 de acá y los 2 de al lado sino vos decís que son las 4 sillas que están en las filas del medio, 2 enfrente, y los otros 2. A ver ¿quién había hecho este? Vamos a preguntar ¿qué son esas 4?*

Alumno que hizo: *Son las sillas que hay alrededor de la mesa.*

D: *Eso hay que explicar ¿sí? Hay que ir poniendo qué son para* *que tengamos claro. Vos ibas a decir otra cosa que podía ser el 4.*

Roberto: *Si podía ser la de la esquina con la de la esquina son 2 la de arriba y la de abajo.*

D: *¿Cómo?*

Varios alumnos: *¿Qué?*

D: *A ver que nos explique.*

Roberto: *O sea las puntas y la de arriba y la de abajo son las 4 que están ahí.*

D: *Pero ahí ya son 6.*

Otro alumno: *Son 2 de cada lado y los otros son de las puntas.*

D: *De todos modos, no son esas porque estábamos suponiendo que podía ser porque acá no está explicado ¿sí? ¿Qué eran estas 4? ¿Qué son estos 4 Ivana?*

Ivana: *Las sillas en una sola mesa.*

D: *Alrededor de la mesa ¿esas son? ¿sí?*

Ivana: *Las que están arriba y las que están abajo.*

D: *claro, las de arriba y abajo en el dibujo ¿sí? Porque no están arriba de la mesa o algo ¿sí? Son las que están de un lado y del otro lado de la mesa, enfrentadas, a los costados...*

La docente anota, agrega en el procedimiento 3 lo siguiente:

12 ⟶ mesas
x4 ⟶ sillas a los costados de las mesas
48 ⟶ total en la hilera de arriba y abajo

Queda claro que nada es evidente para los estudiantes y disponer de ejemplos respecto de esto resulta especialmente relevante para pensar la enseñanza. En particular, en este procedimiento uno se tienta de pensar que el 4 que aparece multiplicando al 12 no puede ser otra cosa que las 4 sillas de los costados de cada mesa, pero hay que rendirse ante la evidencia de que no todos los estudiantes interpretan de esta manera. Por otro lado, la docente comunica a los estudiantes sobre la necesidad de aclarar qué representan cada uno de los valores, pues de otro modo se entienden cuestiones diferentes. Así también, discute sobre la diferencia entre hablar de las sillas de alrededor de las mesas y las que están arriba y abajo. No es un simple problema lexical que atañe al vocabulario, no queda sólo en el plano de los términos, sino que más bien afecta al plano semántico relacionado con ese contexto. Se trata de tener claro que si se habla de alrededor de las mesas se está incluyendo a las sillas de las cabeceras, y en el otro caso se las está excluyendo. Por otro lado, no es una diferenciación menor dado que las sillas del medio son una cantidad variable y las de las puntas son una cantidad fija, con todo lo que esto implica para la producción de la fórmula.

La parte c) de la Fase 1 tiene por objetivo que los estudiantes avancen en los procedimientos. Para lograrlo se da como dato una cantidad de mesas bastante superior a la que se da en la parte a). Se intenta que ante la evidencia de lo fastidioso que podría ser la representación de todas las mesas para luego contar, abandonen este procedimiento y piensen en otro alternativo.

¿Cuáles podrían ser los procedimientos para resolver este problema? Uno de los más primitivos sería dibujar todas las mesas y luego contar uno a uno los asientos. Aquí podría haber variación, como no es fácil que entre la cantidad de mesas en una hoja a lo ancho, se necesita tener control respecto de los asientos de las cabeceras principalmente, pues al quedar “cortada” y tener que dibujar abajo se pierde visualmente la ubicación de una mesa a continuación de la otra. Otros procedimientos serían por ejemplo: imaginar mentalmente la disposición de las mesas y sumar los dos de las cabeceras a las cantidades de los costados, las que se podrían determinar de distintas maneras, por ejemplo: 2 x 31 + 2x31 pensando en 2 por cada mesa de los costados o 4 x 31 considerando 4 lugares por cada mesa.

La organización de la clase y el rol docente en los distintos momentos, puede ser similar al que se planteó con el problema anterior, con algunas variaciones. En un primer momento es conveniente que los estudiantes trabajen en parejas para determinar una solución, la que eventualmente[3] se expondrá para ser validada en una instancia colectiva de trabajo, bajo la gestión del docente.

En la puesta en común se trata, básicamente, de discutir acerca de la economía de los procedimientos, que los estudiantes tomen contacto y se apropien de procedimientos diferentes al caso extremo que sería dibujar todas las mesas y luego contar uno a uno los asientos. En este sentido se podrían extraer conclusiones como las siguientes: “es mejor multiplicar por 4 las 31 mesas y después sumar los dos de las cabeceras, que dibujar y después contar todos”, o “es mejor multiplicar por 4 las 31 mesas y después sumar los dos de las cabeceras que sumar 31 + 31 + 31 + 31+ 2 + 2...” Estas ideas podría retomar el docente e institucionalizarlas.

Siguiendo con la clase donde se propuso esta misma actividad, los estudiantes - apoyados en las discusiones sobre sus respuestas al problema inicial- respondieron con cálculos que dan cuenta de las regularidades que identifican y que para la producción de una fórmula resulta primordial. Se aclara que, si en el primer problema todos se hubieran limitado a contar los círculos que representan a los lugares posibles donde sentarse alrededor de las mesas, este problema para las 31 mesas hubiera significado que, efectivamente, sea la oportunidad de producir cálculos analizando las regularidades.

El objetivo de la **Fase 2** es que los estudiantes elaboren un procedimiento general, para exponer en forma escrita, que sirva para resolver situaciones similares a la planteada. Resulta necesario incluir esta actividad porque se considera que, pensar en una manera de explicar en general el procedimiento que utilizaron con un lenguaje coloquial, aporta recursos que ubican a los estudiantes en mejores condiciones para posteriormente tratar de explicar ese procedimiento a través de una fórmula matemática. En este caso, tienen que analizar la forma en que resolvió el problema, los datos dados y el uso o función que cumplieron dentro del procedimiento utilizado, para poder generalizarlo. Deben elaborar un modelo matemático, pero utilizando un lenguaje coloquial. Por ejemplo, pueden decir: *“tenés que multiplicar la cantidad de mesas por 4 y después tenés que sumarle 2” o “hay que multiplicar por 2 la cantidad de mesas dos veces y sumarle 2”.*

[3] Decimos “eventualmente” dado que la exposición de las distintas producciones se hará solo de las que se muestren como interesantes para la discusión, las que aporten a la riqueza pedagógica necesaria para el aprendizaje a partir de la discusión.

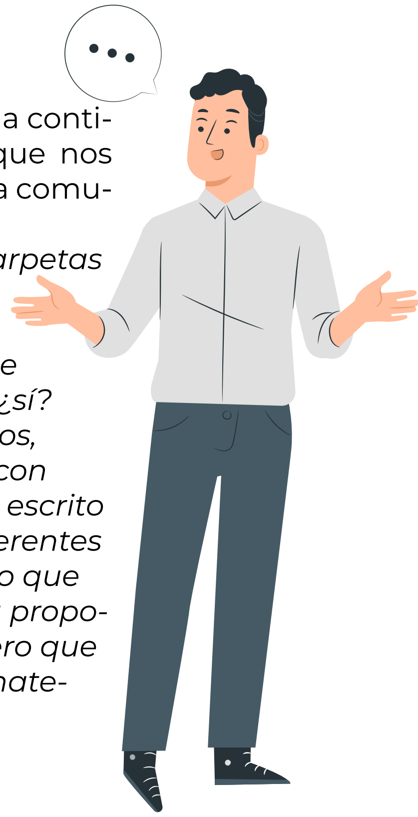
Otros en los que den menos información que la necesaria pueden ser: *"Hay que sumar todas las sillas de las mesas, depende de la cantidad de mesas"*o *"Tenés que sumar 1 de las puntas más todas las sillas de las mesas del medio"*. Y otros en los que el procedimiento que explican es particularizado, utilizando los datos del problema anterior: *"Hay que multiplicar 2 veces 31 por 2 y después sumarle 2"*.

En estos procedimientos se observan posibles diferencias en los niveles de relación de los estudiantes con la generalización de un procedimiento aritmético. En algunos se puede apreciar un inconveniente relacionado con la identificación de lo que es importante decir en una generalización, qué se dice y qué no, cuál es la información necesaria y suficiente en la explicación solicitada *(hay que sumar todas las sillas de las mesas, depende de la cantidad de mesas)* y en otros se observa una dificultad ligada a la imposibilidad de despegarse del procedimiento aritmético, que debería originar la generalización *(hay que multiplicar 2 veces 31 por 2 y después sumarle 2)*. Estas últimas son dificultades que podrían originarse porque la secuencia plantea una ruptura aritmética-álgebra. A los procedimientos descriptos anteriormente, se le suman otros en los que además de la cuestión de la buena o mala explicación del procedimiento utilizado, se le agregan los errores que pudieron haber cometido los estudiantes al resolver el de las 31 mesas *"Tenés que sumar 10 de las puntas más todas las sillas de las mesas del medio" "Hay que sumar 2 veces los asientos del medio más uno de la punta"*. Aunque estas sean cuestiones diferentes en relación al tipo de discusión que originarían, es importante tenerlas en cuenta, ya que habrá que hacerse cargo de ellas en la discusión colectiva.

Se puede organizar 2 clases en grupos de 4 integrantes, la primera de ellas finalizaría cuando el docente retira las producciones escritas de los estudiantes para discutir en una próxima clase. La segunda clase comienza con una síntesis por parte del docente de lo que se estuvo trabajando en la anterior. Posteriormente, se debería organizar una confrontación de las producciones escritas de los estudiantes para comprenderlas, compararlas y diferenciarlas. Las discusiones tendrían que girar en torno de la claridad de las formulaciones elaboradas, al nivel de generalización utilizado y a la validez del procedimiento empleado para la determinación de la cantidad de asientos, cualquiera sea la cantidad de mesas.

El objetivo de la **Fase 3** es que los estudiantes busquen la forma de generalizar a través de una fórmula matemática, el procedimiento que han utilizado para resolver el problema de la Fase 1, se trata de elaborar un modelo matemático a través del uso del lenguaje simbólico. Aquí el problema gira en torno a la escritura matemática y para esto es necesario que realicen un análisis de la situación y el procedimiento utilizado para resolverla, similar al que se referenció en la Fase 2 pero, además, en este caso hace falta pensar en cuáles son los símbolos matemáticos que le permitirán escribir el procedimiento general como fórmula. Es necesario ver qué uso o función, jugaron los datos del problema en el procedimiento de resolución y de qué manera esa función, puede ser reflejada en la fórmula (hay datos que varían y otros que se mantienen constantes).

Un gran problema para el profesor es la comunicación a los estu-



diantes de la tarea de producir una fórmula. Transcribimos a continuación lo que decidió una docente al respecto, dado que nos parece un buen ejemplo sobre cómo se podría abordar esta comunicación:

D: *La última clase trabajamos con las mesas. Abran las carpetas y miren un poquito.*

A: *¿Sobre las mesas no más?*

D: *Sí. En la última clase trabajamos lo de las mesas. Lo que tenían que hacer era elaborar un procedimiento general, ¿sí? Que les permita calcular la cantidad de personas o asientos, mejor dicho, que pueden haber alrededor de esas mesas con cualquier número de mesas ¿está? Ahora ustedes habían escrito el procedimiento, un procedimiento general, buscaron diferentes formas de escribir y analizamos qué faltaba, qué tenía uno que no tenía el otro, qué había que arreglar. Ahora yo les voy a proponer otra cosa que tiene que ver con eso. Pero primero quiero que nos acordemos un poco de cuando decimos fórmula en matemática ¿ustedes saben qué quiere decir?*

A: *…*

D: *¿Se acuerdan de alguna fórmula?*

Algunos alumnos: *No, sí.*

D: *No, no se acuerdan. Una fórmula es por ejemplo la fórmula que sirve para calcular la superficie de un rectángulo ¿cuál es la fórmula? (Los alumnos no se acuerdan, hablan todos al mismo tiempo…)*

D: *La fórmula es base por altura (La docente anota en el pizarrón S = b x h)*

Alumnos a coro: *¡Ah! ¡Sí, ya nos acordamos!*

D: *Bueno, esto es una fórmula ¿qué es lo que hace? También esta fórmula está indicando un procedimiento general, similar a lo que ustedes estuvieron tratando de escribir el otro día. Ustedes trataron de explicar una forma de calcular, para cualquier número de mesas la cantidad de asientos o personas que se pueden sentar alrededor de esas mesas ¿sí? Esta fórmula ¿qué es lo que hace? Para cualquier rectángulo así, o un rectángulo así, o uno finito y largo (dibuja al mismo tiempo que va diciendo rectángulos de diferentes tamaños y posiciones) para cualquier rectángulo me permite calcular la superficie ¿sí? ¿qué es la base del rectángulo? ¿se acuerdan o no? ¿cuál es la base?*

A: *La parte de abajo.*

D: *Ésta por ejemplo es la base ¿sí? (La docente indica en los rectángulos uno de los lados)*

D: *¿Y esto otro qué quiere decir? (por la altura) ¿Qué quiere decir esta "h"?*

Varios alumnos: *La altura.*

D: *Representa eso. Entonces ¿qué es lo que está diciendo esta fórmula? Que para calcular la superficie de un rectángulo ¿qué hay que hacer?*

Varios alumnos: *Medir la base y la altura…*

D: *¿Y después qué hay que hacer?*

Varios alumnos: *Multiplicar.*

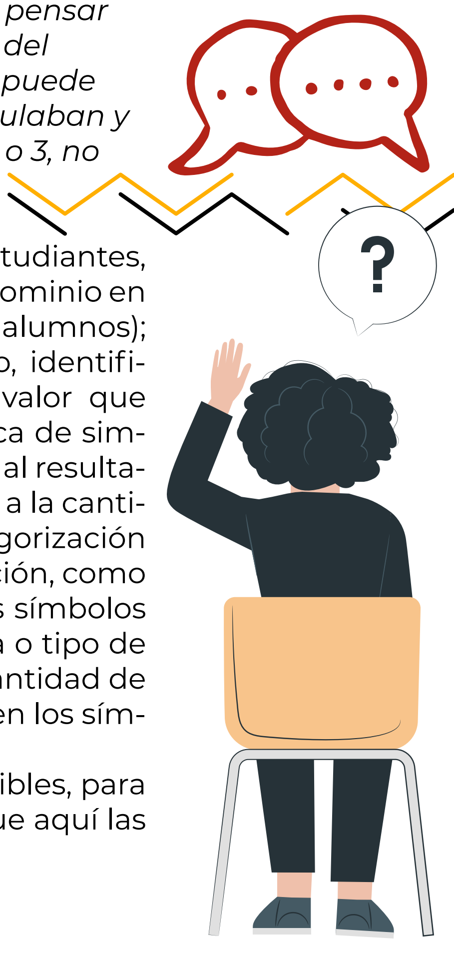
D: *Multiplicar la medida de la base por la medida de la altura ¿sí? para cualquier rectángulo. Es decir, esta es una manera de escribir un procedimiento general, pero es una escritura matemática, no en frases así como ustedes escribieron el otro día ¿se entiende? Otra fórmula también para el rectángulo que debe-*

rían conocer, pero si no se acuerdan de ésta, capaz que de ésta tampoco, es la del perímetro ¿Cómo hacían? Hacer 2 por el lado mayor más 2 por el lado menor. (La docente anota en el pizarrón: P = 2L + 2l) ¿La superficie qué es lo que da? La medida de todo esto (indica la parte de adentro de los rectángulos) ahora el perímetro da la medida del contorno del rectángulo. Entonces ¿esta fórmula qué está diciendo? Que este contorno, que es el perímetro, es igual a los 2 lados iguales más estos otros lados iguales que son los "chicos" ¿sí? La suma de estos 2 lados iguales más la suma de estos dos. Eso está diciendo esta fórmula en "cortito". Entonces si pensamos en una forma de explicar, como la que explicaron ustedes el otro día esto se podría decir: para calcular el perímetro hay que hacer, multiplicar 2 por el lado más grande y luego sumar 2 por el lado más chico. Ustedes hacían esto el otro día, escribían todo ¿está? Lo que yo les estoy pidiendo, lo que les voy a pedir ahora es que vuelvan a mirar sus carpetas y vean los procedimientos escritos, así como escribieron y así se acuerdan de lo que discutimos el otro día y en grupos de 4 piensen en una fórmula, es decir algo similar a esto, una fórmula, una expresión parecida a ésta que les permita calcular la cantidad de asientos o personas que hay alrededor de las mesas para cualquier número de estos. Es decir, esto mismo que explicaron ustedes en las carpetas, eso mismo que lo puedan escribir como fórmula ¿se entiende lo que tienen que hacer?

Algunos alumnos: No.

Otros alumnos: *Hay que hacer una igual que esas fórmulas.*

D: *¿No? Igualita no tiene que ser, una es de superficie y esta otra es de perímetro. Ustedes habían escrito un procedimiento general que les permitía calcular la cantidad de personas o asientos que hay alrededor de las mesas, de esas mesas, de ese tipo de mesas. Ahora, lo que yo les pido es que esto que escribieron en frase lo traten de escribir, así como fórmula. Tienen que pensar cómo van a escribir. Lo piensan y lo discuten entre los 4 del grupo ¿está? Vean en la carpeta lo que quieran, eso les puede ayudar. Primero traten de acordarse cómo era que calculaban y después piensen entonces cómo escribir. En grupo de 4 o 3, no más de 4.*



En las distintas fórmulas que podrían producir los estudiantes, seguramente se lograrán apreciar diferentes niveles de dominio en el uso del lenguaje simbólico (práctica semiótica de los alumnos); habrá posiblemente algunos de ellos que, por ejemplo, identifiquen al número de mesas y de personas como un valor que cambia, pero no sepan que hay una manera matemática de simbolizar esa situación. Otro caso podría ser que entiendan al resultado como un valor variable (número de personas) pero no a la cantidad de mesas. Otra posibilidad es que realicen una categorización de los datos que se usan en la fórmula a partir de su función, como valores variables o constantes y que además utilicen los símbolos matemáticos para elaborar la fórmula. En esta categoría o tipo de procedimiento, hay fórmulas que permiten obtener la cantidad de personas que se requiere y las que a pesar de utilizar bien los símbolos, no logran producir fórmulas efectivas.

Tomando la identificación de los diferentes status posibles, para las letras que hacen Fermi y Bessot (1997)[4] pensamos que aquí las

[4]En Gustavo Barallobres (2000), UVQ- "Algunos elementos de la didáctica del álgebra".

letras, en general, estarían jugando un rol de “números desconocidos que no son fijos”. Es necesario que, para la evolución hacia la noción de variable, se organice posteriormente con los estudiantes actividades que tiendan hacia la concepción de la letra como representante de un conjunto conocido de números.

En relación a la **organización de la clase**, en esta fase se puede conformar grupos de 3 o 4 para intercambiar los procedimientos que usaron y tengan una forma de evaluar si lo que producen sirve para representar lo que hicieron. Para que sean varios los que evalúen desde lo que obtuvieron antes, si va a servir o no en general lo que realizan, o si es lo suficientemente claro, es importante que existan diferentes puntos de vista para contrastar, esto contribuye a que la fórmula que construyen pase por algunos *filtros*, antes de llegar a la puesta en común. El intercambio dentro de los grupos, propicia la aparición de los primeros argumentos que fundamentan sus producciones, hace que haya entre los integrantes pequeñas o grandes discusiones, hasta que se decide qué queda como producto común para la confrontación.

El rol del docente en esta fase, debe centrarse principalmente en que los estudiantes entiendan cuál es la tarea que se les propone, auxiliar a los grupos que no logran iniciar la actividad y observar con atención las discusiones que se generen, lo que desechan a partir de ellas, los errores en los que incurren, cuáles se resuelven a partir de la discusión y los que persisten además de las diferentes producciones que van resultando. La finalidad de estas observaciones es decidir con fundamentos lo que será necesario discutir en la puesta en común en función de lo que realizan los estudiantes y de los objetivos de la secuencia.

En la **fase 4** se realiza la confrontación entre las distintas fórmulas que se produjeron en los grupos, con el objeto de validarlas a partir de contrastarla y de poner a los alumnos en situación de entender procedimientos de otros. Otro objetivo de esta fase es acercar a los distintos grupos, a través de analizar y clarificar las diferentes producciones, a niveles de conocimiento similares. El hecho de hablar sobre lo que hizo el otro y tratar de entenderlo sitúa a los estudiantes que realizaron producciones de menor nivel, en mejores condiciones de producción para cuando se les plantee otras situaciones similares.

Cuando los estudiantes <u>observan las fórmulas de otros</u>, se ubican en la posición de analizar si a partir de ellas se obtiene la cantidad de mesas o no, en cambio cuando están armando <u>su expresión</u>, como en la fase 2, tratan de “explicar” lo más claramente posible lo que ellos hicieron para encontrar la solución. De esta manera se introducen cuestiones que no estaban en la fase anterior, los estudiantes podrán advertir que lo que parecía tan claro al escribirlo, no lo es tanto al leerlo o que realmente no han llegado a elaborar lo que se está buscando. Esto se origina en la interacción con otros que no intervinieron en el proceso de producción, y que por lo tanto no cuentan con el bagaje de información acumulada en dicho proceso, lo que no les permite entender una producción que da por obvio cosas no obvias.

La *confrontación* cobra aquí -al igual que en las demás puestas en común organizadas en la secuencia- fundamental importancia, como generadora de una interacción a-didáctica, que origina preguntas, revisa las propias respuestas, habilita un espacio de producción colectiva y de alguna manera valida las producciones en función de su comunicabilidad. Es a partir de lo que ven y entienden los demás, que se hace necesario dar cuenta del sentido y el uso de los símbolos, que forman parte de las expresiones que usan los estudiantes. En esta fase se deben establecer acuerdos y convenciones en relación al uso de los símbolos. Es preciso establecer acuerdos acerca de cómo se expresan y cómo se usan las variables y las constantes en las fórmulas que producen.

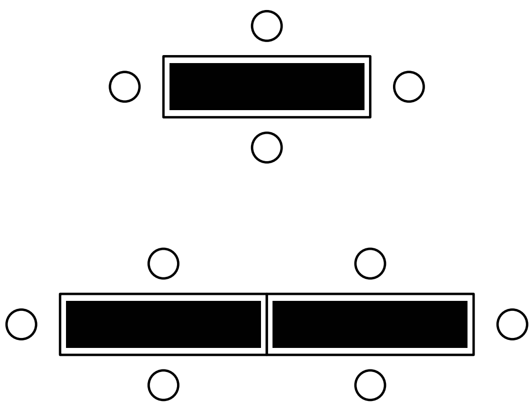
Esta fase propicia la validación de las producciones de los estudiantes, como fórmulas generadoras de la cantidad de mesas. Aquí se debe discutir sobre si la fórmula funciona como se espera. Además, es importante analizar las diferentes fórmulas que logran su objetivo y relacionarlas, así como también analizar lo que falla en las que no lo consiguen.

El docente juega aquí un rol de receptor de la fórmula que emiten los estudiantes y muchas de las preguntas que podrá hacer son posiblemente para entender lo que hicieron, sin embargo, este receptor es un receptor calificado, ya que no preguntará cualquier cosa que no se entiende, sino que deberá decidir qué preguntar en función del objetivo de enseñanza que tiene, de lo que haya observado durante el trabajo en grupos o de lo que le parece clave discutir, por ejemplo, para disipar dudas. Aquí su rol es central, ya que es el que guía la discusión - a partir de preguntas, de la selección criteriosa de lo que se discute y a quiénes hace intervenir en la discusión según sea la cuestión a tratar - hacia el objetivo de enseñanza que está en desarrollo.

VARIANTE DEL PROBLEMA 1

Una variante del problema de las mesas largas es una versión extraída del Programa de la Universidad Nacional del Nordeste (UNNE): *La UNNE te acompaña. Tendiendo puentes hacia el Estudio Universitario.* (2015-2017)

Problema: *Las mesas de un salón de fiestas tienen 4 lugares. En el siguiente esquema se representa la mesa con un rectángulo y con "o" cada una de los asientos, tal como se disponen en cada mesa.*



Vuelca en esta tablas los datos que vayas encontrando:

Nº DE MESAS	Nº DE LUGARES

a) *Si se colocan 5 mesas juntas ¿cuántos lugares habrá?*

b) *Y si se colocan 10 mesas juntas ¿se podrán sentar 24 invitados?*

c) *Si se juntaran 80 mesas ¿cuántos lugares habría disponibles?*

d) *Para averiguar el número de lugares disponibles con 7 mesas ubicadas como en los dibujos anteriores el dueño realizó la cuenta 7 x 4 - 6 x 2 = 16 ¿Cómo habrá contado los lugares?*

e) *Una "gran" mesa armada como las anteriores, ¿puede tener 201 lugares disponibles?*

f) *Si se pueden sentar 32 invitados, ¿cuántas mesas habrán colocado juntas?*

g) *A una fiesta vinieron todos los invitados y se pudieron sentar sin dejar ningún lugar vacío. Si a otra fiesta vendrá el doble de invitados ¿será necesario armar el doble de mesas?*

h) *Escribí 3 cantidad de invitados de manera que se puedan sentar todos y que no quede ningún lugar vacío y 3 cantidades de invitados para los que no se pueda armar una "gran" mesas sin dejar lugares vacíos.*

PARA SEGUIR TRABAJANDO LA VARIACIÓN LINEAL...

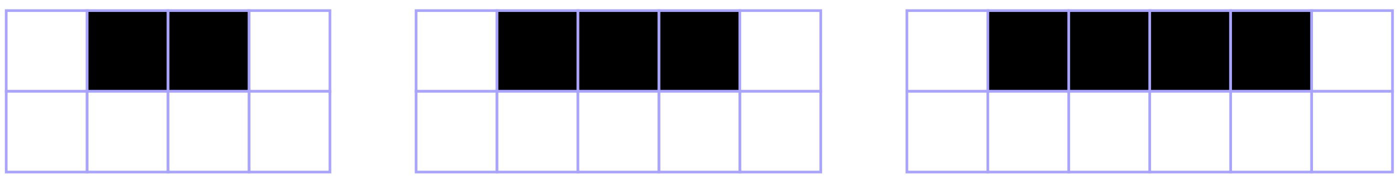
En la mayoría de los libros de matemática del ciclo básico se presentan problemas de este tipo.

Ejemplo 1.

(Extraído de Matemática 8vo (2006). Tinta Fresca. H. Itzcovich y otros)

Problema 1:

Para embaldosar un patio se tienen diseños con baldosas blancas y negras como las siguientes:



a) Averigüen la cantidad de baldosas blancas necesarias si hay 15 baldosas negras.

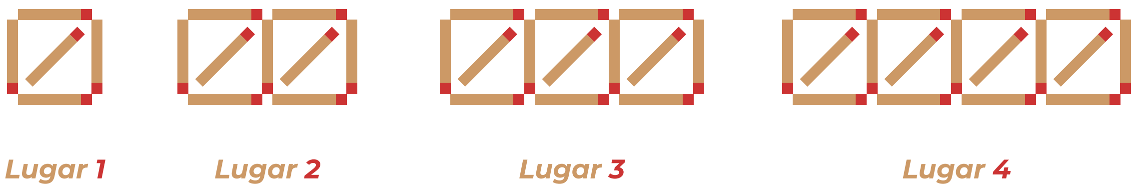
b) Si se sabe que hay 25 baldosas blancas, encuentren la cantidad de baldosas negras que se necesitan.

c) Encuentren una fórmula que sirva para contar la cantidad de baldosas blancas si se conoce la cantidad de baldosas negras.

d) ¿Se puede encontrar una fórmula que sirva para contar la cantidad de baldosas negras si se conoce la cantidad de baldosas blancas?

Problema 2:

Se construye con fósforos una sucesión de figura, manteniendo siempre la misma estructura, como las siguientes:



a) ¿Cuántos fósforos se necesitan para construir la figura que está en noveno lugar? ¿Y para la que está en el lugar 73?

b) Hallen una fórmula que permita calcular la cantidad de fósforos que tiene la figura en el lugar n.

c) ¿Puede haber una figura que tenga 3.333 fósforos? ¿Y una figura con 648? ¿Por qué?

d) Puede ser que $F= 2. (n-1) +3$ sea una fórmula que permita calcular los fósforos que hay en la figura que está en el lugar n? ¿Por qué?

Hasta aquí se han propuesto actividades que permiten el estudio de lo lineal en contextos aritméticos o discretos, pretendiendo que los estudiantes aprendan a elaborar fórmulas, a partir del análisis de las regularidades en el comportamiento del crecimiento de la cantidad total, a medida que varía un dato de la colección. Se verá a continuación cómo iniciar el estudio de lo cuadrático en este mismo contexto, a partir del establecimiento de las diferencias entre dos problemas similares, pero la forma en cómo varía la cantidad de elementos que se cuentan en este caso (cuadraditos en nuestro ejemplo), es muy distinta de un problema a otro.

DE LO LINEAL A LO CUADRÁTICO…

Avanzando en el trabajo con propuestas que se apoyan en conocimientos aritméticos se plantean dos problemas de conteo de colecciones. Las preguntas enunciadas en ambos, permiten precisar el tipo de variación de cada uno, es decir, cómo aumenta la cantidad total de cuadraditos a medida que aumenta la cantidad de cuadraditos de la base.

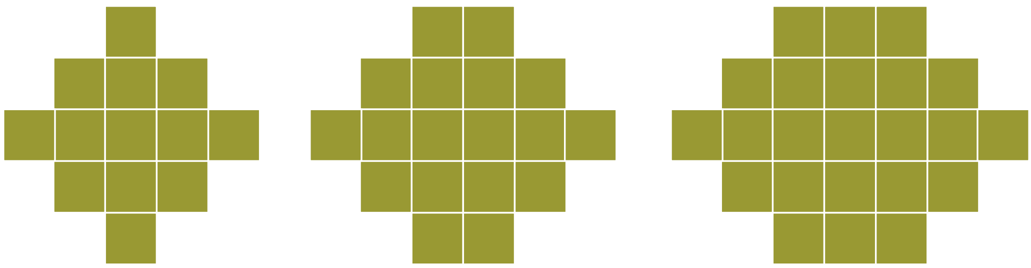
Lo interesante en estos dos problemas es que a simple vista la variación pareciera ser la misma, sumado a la forma de las figuras (forma de cruces en ambos) que también son similares, sin embargo, se trata de modelos de variación muy diferentes y la comparación entre ambos representa un gran aporte a la comprensión del pasaje de lo lineal a lo cuadrático. La forma en cómo se agregan cuadraditos en uno y otro caso define una regularidad que en el primer problema corresponde a una variación lineal y, en el segundo, a una cuadrática.

Los estudiantes tienen que identificar la regularidad en la conformación de cada una de las figuras a medida que se hace variar uno de los elementos que la componen, con el objetivo de elaborar el modelo matemático que describe la variación.

Se presentan a continuación los dos problemas y las preguntas para los estudiantes y, a continuación, la propuesta de como se podrían abordar los mismos para que comprendan las diferencias entre uno y otro tipo de variación.

PROBLEMA 1:

Se forman figuras como las siguientes formadas, a su vez, por cuadraditos. Aquí están dibujadas la que tiene un cuadradito de base, dos cuadraditos de base y tres cuadraditos de base respectivamente.



1 *Calcular la cantidad de cuadraditos que tendrá una figura de 4 cuadraditos en la base.*

2 *¿Es verdad que por cada cuadradito que se agrega en la base, se agrega 5 cuadraditos al total?¿cómo se explica?*

3 *Armar una fórmula que permita calcular la cantidad de cuadraditos de una figura que tenga “n” cuadraditos de la base.*

- *Explicar cómo se está contando la cantidad de cuadraditos con dicha fórmula.*

4 *Determinar si las siguientes fórmulas permiten contar la cantidad de cuadraditos de la figura de “n” cuadraditos de en la base.*

a) $5(n+4) - 12$

b) $(n+4)2 – 12$

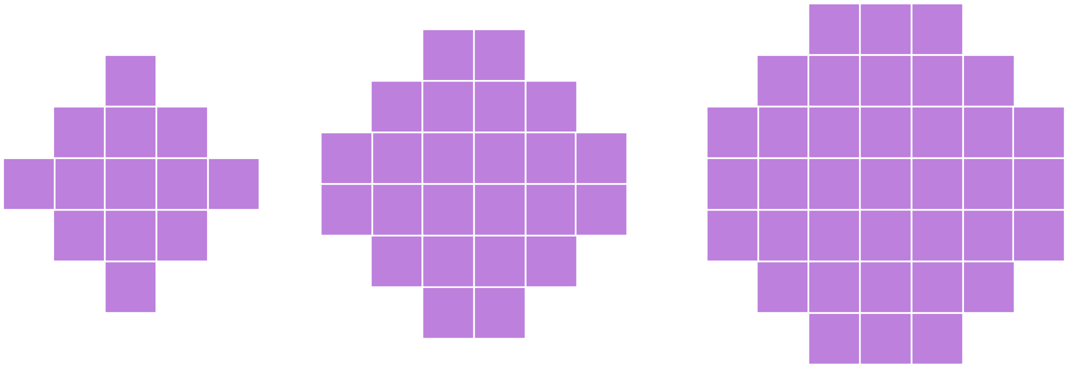
c) $5(n+2) - 4 + 2$

d) $3(n+4) – 4 + 2n$

e) $3(n+2) + 2n + 2$

PROBLEMA 2[5]:

Se construyen nuevas figuras formadas por cuadraditos con cierta forma. Aquí está dibujada la figura con un cuadradito de base, dos cuadraditos de base y tres cuadraditos de base.



1 *Calcular la cantidad de cuadraditos que tendrá una figura de 4 cuadraditos en la base.*

2 *Como vimos en el problema anterior, si se incrementa un cuadradito en la base de la figura, la cantidad total de cuadraditos aumenta en 5. En este caso, no sucede lo mismo, es decir no aumenta de 5 en 5. Registra las cantidades totales de cuadraditos de las figuras que tenes en la siguiente tabla:*

Cantidad de cuadraditos de la base (n)	Cantidad total de cuadraditos
1	
2	
3	
4	

3 *¿Cómo se explica que la cantidad de cuadraditos totales no aumenta siempre la misma cantidad?*

4 *Armar una fórmula que permita calcular la cantidad de cuadraditos de una figura que tenga "n" cuadraditos de la base.*

5 *¿Cuáles de las siguientes fórmulas son válidas para resolver el problema?*

a) 2(n+2)

b) 2n + 4

c) d) 2n + 2

d) n(n+2)

e) n.n +2

f) g) n2 + 2n

[5]Actividad diseñada sobre la base de la actividad extraída de: Sessa, C. (2007): Aportes para la enseñanza: Matemática. Función cuadrática, parábola y ecuación de segundo grado. C.A.B.A.

ANÁLISIS Y PUESTA EN PRÁCTICA DE LOS PROBLEMAS EN LAS CLASES

En los problemas 1 y 2 es posible reconocer qué características tiene cada serie de figuras y producir una fórmula que modelice una manera de contar una colección de forma independiente en cada caso. Claramente, ambos problemas involucran variaciones distintas de una colección, a partir de la modificación de otra.

En el **problema 1** el total de cuadraditos de una figura en función de "n" cuadraditos en su base se corresponde con un modelo lineal, pues por cada cuadradito que se incrementa en la base el total de cuadraditos de la figura aumenta en 5. Gráficamente, por cada cuadradito que se agregue en la base se agrega una columna de 5 cuadraditos, manteniéndose la cantidad de filas de la figura.

Sin embargo esta variación es diferente en el **problema 2:** al aumentar la cantidad de cuadraditos en la base de una figura, aumenta el número de columnas pero también aumenta la cantidad de filas. Específicamente, por cada cuadradito que se incrementa en la base, el total de cuadraditos aumenta en una fila y en una columna, es decir que, aumenta en dos direcciones (bidireccional). En este caso, la variación del total de cuadraditos de la figura en función de "n" cuadraditos de su base se corresponde con un modelo cuadrático.

Un asunto central en esta propuesta de enseñanza es la de identificar ambas variaciones y compararlas, con el objetivo de que los estudiantes comprendan la diferencia entre un tipo de crecimiento y otro tal como se señaló anteriormente.

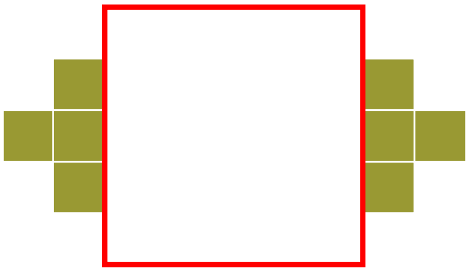
Un camino posible es plantear preguntas que permitan tratar la variación en un problema sobre la base de saber cómo es la variación en el problema anterior o tratarlos de manera independiente, y luego comparar las cantidades y fórmulas. La opción propuesta aquí es analizar la variación del problema 2 a partir de saber cómo es la variación en el problema 1.

Así, en ambos problemas se inicia preguntando por la cantidad de la colección de cuadraditos de la figura que tiene 4 cuadraditos en la base, con el objeto de extraer conclusiones sobre la regularidad en cada problema: cómo es la figura en comparación con las otras tres figuras dadas, qué elementos varían y cuáles se conservan. Pero en el segundo problema, inmediatamente se hace explícito el asunto a tratar: qué sucede cuando se quiere calcular el total de cuadraditos de la figura siguiente a una, apuntando a entender el por qué la variación no es igual al problema anterior (no varía en 5 más ni varía siempre lo mismo).

Tanto en uno como en otro problema, existen distintas maneras de contar el total de cuadraditos. Ahora bien, para poder identificar más detalladamente las diferencias entre uno y otro se focalizó en una manera de contar cada caso planteado.

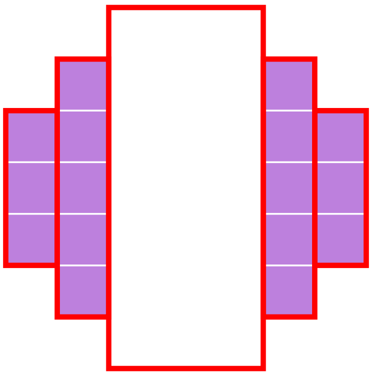
Procedimiento del problema 1:

5 . n + 8 : *considerando un rectángulo de 5.n cuadraditos, más los 4 cuadritos que quedan en cada lado de la figura (4 a la izquierda y 4 a la derecha del rectángulo central).*



Procedimiento del problema 2:

n . (n + 4) + 2 · (n + 2) + 2 · n : *Contando los cuadraditos del rectángulo de lado n y altura (n+4) al que se le agregan dos columnas de (n+2) cuadraditos en cada una (una columna a la derecha y otra a la izquierda) y dos columnas de n cuadraditos cada columna.*



En el problema 1, cuando se agrega un cuadradito a la base, siempre se agrega una columna de 5 cuadraditos, es decir que siempre se agrega 5 a la cantidad que había en la figura anterior. La cantidad de columnas aumenta y la cantidad de filas se mantiene siempre constante en 5. Cuando la variable aumenta una unidad en la fórmula (5n+1) que cuenta la cantidad de cuadraditos, el resultado que cuenta la cantidad de cuadraditos aumenta en 5 cualquiera sea el valor de la variable.

En el problema 2, a diferencia del problema 1, cuando se agrega un cuadradito a la base la figura aumenta no sólo en una columna, sino también en una fila, además de otros agregados. Al contar el total de cuadraditos del rectángulo cuyo lado coincide con la base de la figura y la altura es la base más cuatro, se identifica que cada columna que se va agregando tendrá un cuadradito más, por tener una fila más y lo mismo sucede por cada fila que se va agregando (tiene un cuadradito más por tener una columna más). Así, la fórmula para una figura de n cuadraditos en la base es:

$$n \,.\, (n + 4) + 2 \cdot (n + 2) + 2 \cdot n$$

donde dos de sus términos son lineales, pero uno de ellos, el primero, es un producto de dos factores que varían.

Para observar lo descripto anteriormente, puede complementarse con una tabla, en la que se registren las cantidades de cuadraditos de las figuras en ambos problemas como la siguiente:

Cuadraditos de la base	Cantidad de cuadraditos Problema 1	Cantidad de cuadraditos Problema 2
1	13	13
2	18 = 13+ **5**	24 = 13 + **11**
3	23 = 18 + **5**	37 = 24 + **13**
4	28 = 23 + **5**	52 = 37 + **15**
n	$5 \cdot n\ + 2 . 4$	$n . (n \quad 4) + 2 \cdot (n \quad 2) + 2 \cdot n$
n+1	5·(n+1)+2 .4= $5 \cdot n\ +5 + 2 . 4$	(n+1).(n+1 + 4) + 2. (n+1+2) + 2 (n+1)

Se observa en la columna de datos del **Problema 1** que cada vez que se aumenta en 1 la cantidad de cuadraditos de la base se aumenta en 5 el total de cada figura con respecto a la anterior. Algebraicamente también es posible advertir, el por qué aumenta en 5 al pasar de “n” a “n+1”.

Del mismo modo, si se analiza la columna de datos del **Problema 2**, se observa que lo que se suma a la cantidad anterior ya no es un mismo valor el que se agrega al incrementar en 1 la cantidad de cuadraditos de la base, sino que ahora es variable, en este caso la cantidad que se agrega, aumenta de 2 en 2. Es importante trabajar con los estudiantes que si bien el problema responde a un modelo lineal, la variación de la cantidad total de cuadraditos en función de la cantidad de cuadraditos de la base no es lineal. .

Con los estudiantes puede ser engorroso analizar las diferencias entre las expresiones algebraicas pero al operar algebraicamente y hacer la diferencia entre ambas expresiones se obtiene 2n+9, lo que nos permite afirmar que la diferencia en la cantidad de cuadraditos entre una figura y la siguiente va variando, a diferencia del **Problema 1** donde siempre es 5.

El estudio de la variación cuadrática se puede continuar con otros problemas de conteo de colecciones presentes en distintos libros de textos para el nivel secundario.

EL PRODUCTO DE NÚMEROS NATURALES: OTRO CONTEXTO PARA PENSAR LAS RUPTURAS ENTRE LO LINEAL Y LO CUADRÁTICO

A continuación, se presentan actividades que recuperan el trabajo con el producto de números naturales y que también permiten el estudio de las relaciones y rupturas entre los dos modelos de los que se vienen desarrollando en este documento:

1) ***a.*** Sabiendo que 58x75 es 4350, si sumamos 1 a 58, es decir que ahora la multiplicación es 59x75 ¿se podrá encontrar el resultado de 59x75 sin necesidad de realizar la cuenta?

b. Y si se sumara 1 a 75, ¿se podrá encontrar el resultado de 58x76 sin necesidad de realizar la cuenta?

c. Si sumamos 1 al 58 y al 75, es decir queda 59 y 76 ¿cuál será el resultado de 59x76?

2) ¿Cómo se podrían resolver/interpretar los problemas anteriores en un marco geométrico considerando a los productos como áreas de rectángulos?

3) Si en vez de sumar 1 a ambos factores se sumara 3, ¿cuál sería el resultado sin efectuar la cuenta?

ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES

El problema a resolver podría ubicarse en el terreno del cálculo mental, esto es en la producción de un recurso de cálculo, apoyado en las propiedades del producto para obtener el resultado, pero, tal lo anticipado, la tarea consiste en producir una afirmación sobre el modo en el que se podría proceder, para obtener el resultado sin recurrir al algoritmo. Esta producción habilita una discusión sobre las variaciones en el resultado conocido, para lograr el nuevo que se requiere. Estas variaciones, como se verán, aluden a dos tipos de comportamientos: lineal y bilineal, en este caso, cuadrático.

Si se centra el interés en el resultado del producto, se reducen los problemas a un cálculo numérico y de este modo se aleja el estudio de esta operación en términos de relaciones y de propiedades que la caracterizan y que, por otro lado, implica unos "primeros acercamientos" al funcionamiento de los modelos lineales y cuadráticos.

Tener que pensar el producto sin necesidad de efectuar la cuenta, obliga a recuperar algunas propiedades y concepciones del producto para proponer una solución a los problemas planteados y brinda sentido a las relaciones que se establecen, entre el resultado de un producto y la variación de un factor o ambos simultáneamente.

Una alternativa para responder a la consigna, es pensar del siguiente modo: (58+1). 75; 58.(75+1) y (58+1).(75+1) y luego aplicar propiedad distributiva del producto con respecto a la suma. Ahora bien, una situación es aplicar una propiedad conocida y otra es analizar esta propiedad en términos de propiedad del producto. Por ejemplo, cómo se explica el sumar 1 en el caso de incrementar 1 a ambos factores, contraponiendo esta reflexión a los casos anteriores en los que se incrementa solo uno de los factores.

Posteriormente sumar 3 a ambos factores, permitirá volver sobre esta cuestión. Como sucede habitualmente, aplicar una propiedad y entender su razón de ser no corresponde a un mismo conocimiento.

Pensar a la multiplicación como una suma reiterada de uno de los factores, es una noción construida en los primeros años de la educación primaria, que se puede utilizar para empezar a resolver la situación. Sin embargo, para las últimas actividades esta herramienta tiene ciertas limitaciones, dejando oculto la variación del producto en relación con la variación de sus factores. Pensar al producto como producto de medidas se transforma en otra alternativa para resolverlo, poniendo en evidencia el cambio de variación producida entre el resultado y la variación de ambos factores simultáneamente.

Para que la situación tenga sentido los números elegidos como factores no pueden ser elegidos al azar, sino más bien aquellos cuyo producto no formen parte de un repertorio conocido o aquellos de los cuales resulta más difícil tener disponible su resultado.

Al considerar como factores a 58 y 75 en la cuenta cuyo resultado es conocido, el producto 59x75, 58x76 y 59x76 podría no formar parte de un posible repertorio de productos memorizados. Por lo tanto, tiene sentido para la situación establecer relaciones entre la modificación del producto al variar uno -o ambos- factores.

Si los factores tomaran valores pequeños, como por ejemplo 3x4 no sería necesario pensar en la relación entre el producto inicial y la variación de uno –o ambos- factores, pues 4x4, 3x5 o 4x5 podrían ser parte de un repertorio de productos memorizados, perdiendo sentido la actividad de relacionar con el producto dado.

Por tanto, considerar como factores a 58 y 75 permite dar sentido a la pregunta de averiguar el producto modificando uno o ambos sin hacer la cuenta.

LA MODIFICACIÓN PRODUCIDA A LOS FACTORES

Modificar uno solo de los factores no involucra las mismas cuestiones que modificar ambos factores simultáneamente.

Las dos primeras consignas -A y B- consisten en sumar 1, solo a uno de los dos factores del producto 58x75, mientras que la tercera consigna -C- consiste en sumar 1, a ambos factores simultáneamente.

En el ítem 1) A) el producto 59x75 podrá ser pensado como 59 veces el número 75, o sea como suma de 59 sumandos iguales a 75. Dado que 58 veces 75 es igual a 4.350, para encontrar el producto solicitado, basta sumar una vez más el número 75. De la misma manera en el ítem 1) B) puede ser interpretado 58x76 considerando a 75 como contador del número de veces que se repite 58.

Es decir, **sumar 1 a uno solo de los factores, se traduce en sumar una vez el otro factor.** Se trata, en este caso, del significado del producto como isomorfismo de medidas.

En el ejercicio **C)** se pide determinar, de ser posible, el resultado del producto al sumar 1 a ambos factores, (58+1).(75+1). Este problema debería permitir analizar el funcionamiento diferenciado de la suma, con respecto a la multiplicación.

La pregunta a raíz de esto es ¿Qué modificaciones puede producir en el producto 58x75=4350 sumar 1 a cada factor simultáneamente? Para su análisis e interpretación, se podrán escribir los cálculos que admite:

59 x 76 puede ser considerado como:

a. 58x75 + 58 + 76 Respuesta correcta obtenida como aplicación sucesiva de la relación lineal, usada en el caso de modificar un único factor, por lo cual también podría considerarse como 58x75 +59 +75.

b. 58x75 + 58 + 75 + 1 Respuesta correcta pensada como producto de medidas.

El tercer problema pone en evidencia que al sumar uno a cada factor, ya no es sumar una vez cada uno de los factores. Es decir, no se puede seguir pensando en una variación lineal "directa", pues si lo fuera valdría que 59x76=4350+58+75 sin embargo, resulta necesario sumar 1 a ese resultado.

Estos ejercicios podrían considerarse como parte de un proceso de algebrización donde se proponga investigar la relación entre el producto ***ab***, siendo a y b números naturales, y los productos obtenidos al modificar sus factores.

Para alguien que ya dispone de una simbolización algebraica y de las reglas de manipulación correspondientes, estas distintas resoluciones pueden ser escritas[6] de la siguiente manera:

Sean a,b $\in$ N

- (a+1).b = ab + b;

Para este caso lo que se incrementa al resultado del producto inicial es una cantidad fija, correspondiente a "una vez el otro factor no aumentado".

De igual manera si se hubiera incrementado en 1 al segundo factor, el resultado también varía una cantidad fija:

- a.(b+1)= ab + a; aquí lo que aumenta es una vez el primer factor.
- (a+1)(b+1) =

ab + (a + 1) + b; (i)
ab+ a+ (b+1); (ii)
ab + a + b + 1 (iii)

[6]Nota: se escribe paréntesis en algunas expresiones, aunque no sean necesarios para poner en evidencia la relación con el tipo de razonamiento realizado con los números.

Podemos analizar que las respuestas i, ii y iii de la tercera situación aparecen como idénticas algebraicamente, pero pueden resultar muy diferentes a nivel de los números, ya que en el caso de las respuestas i y ii, se realizaría una modificación lineal, producida por la variación en uno de los factores, y considerando este nuevo número, se produce la segunda modificación lineal. En cambio, en la última respuesta (respuesta iii) se consideran a ambos factores como independientes, lo que genera la aparición no sólo de los factores iniciales, sino la necesidad de sumar 1.

En términos generales, sean a, b, n números naturales. Considerando n como valor de la variable para todo producto a.b se cumple:

$(a+n).b= a.b + n.b$

$(a+n). (b+n)=a.b + n(a+b)+n^2$

El modelo correspondiente a la variación del resultado, al modificar uno solo de los factores es lineal. En cambio, si aumenta en n ambos factores simultáneamente, la variación del resultado del producto al sumar a ambos factores una cierta cantidad se modeliza bilinealmente, tal como se describe en el capítulo I del marco didáctico-matemático.

Si se considera al producto como producto de medidas, donde cada factor corresponde a la medida de los lados de un rectángulo, efectivamente el área de este rectángulo al modificar ambos lados (factores) el área variará en tres direcciones, dando lugar a un nuevo valor que resulta el área que se obtiene del producto de los incrementos considerados (n2), área que se agregaría a las áreas correspondientes a los incrementos lineales (a.n y b.n), tal como puede observarse en la siguiente ilustración:

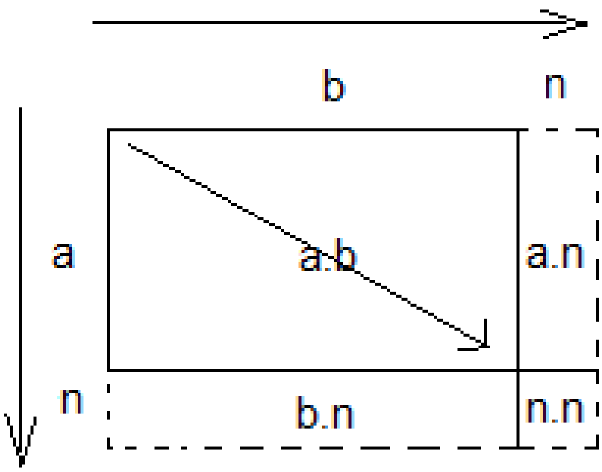


figura 1

En cambio, al modificar uno solo de los lados (un solo factor) se está modificando en una sola dirección (linealmente) y aquí el área tiene un comportamiento lineal, en particular si se incrementa en doble alguno de los factores, el área del nuevo rectángulo tendrá el doble de la inicial.

En el ítem A) la modificación realizada de sumar 1 a uno de los factores se puede representar gráficamente, como sumarle 1 a la longitud del lado del rectángulo que mide 58 y así al resultado se le sumaría el área del rectángulo que tiene por lados a 1 y 75.

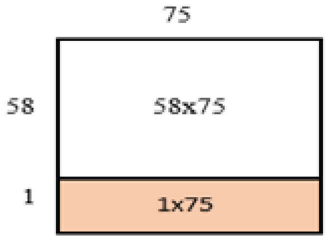


Figura 2: Producto 59x75 como suma de áreas de los rectángulos 58x75 y 1x75

En el ítem B) se suma 1 de longitud a 75, lo que correspondería sumar el área de un rectángulo de lados 1 y 58 al área que ya se tenía.

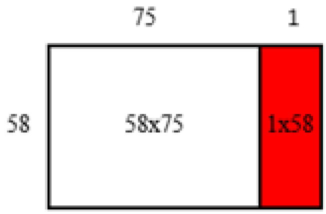


Figura 3: Producto 58x76 como suma de áreas de los rectángulos 58x75 y 1x58

En el caso del inciso c) si se suma 1 a cada uno de los lados, se está considerando al 1 como una medida de longitud, pero en este caso es necesario sumar además del área de los rectángulos 1x58 y 1x75, el área del cuadrado de lados 1x1= 1. Gráficamente esto se puede representar como un rectángulo formado por el rectángulo de lados 75 y 58; el rectángulo de lados 58 y 1; el rectángulo de lados 75 y 1 y el cuadrado de lado 1:

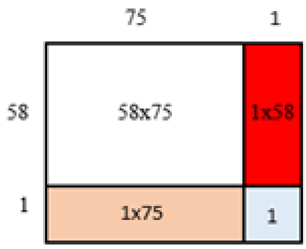


Figura 4: Producto 59x76 como área de los rectángulos: 58x75, 1x75, 1x58 y 1x1.

Este conjunto de problemas, obliga a tratar al producto en términos de relaciones entre sus elementos, lo cual permite diferenciar fuertemente la noción de producto como isomorfismo de medidas y como producto de medidas. Identificar las diferencias que implican estas dos concepciones, habilita a establecer relación entre estas cuestiones y las dificultades que se producen en las relaciones, entre lo lineal y lo bilineal –en nuestro caso, lo cuadrático- y el trabajo de los alumnos en torno a ellas.

Por último, es oportuno al momento de tomar esta propuesta como parte de las actividades a proponer a los estudiantes, preguntarnos:

- ¿Qué dificultades podrían tener al enfrentarse a cada una de las actividades? ¿Por qué?
- ¿Por qué estas actividades permitirían un primer acercamiento al estudio de los modelos lineal y cuadrático?

El trabajo con el producto de números naturales propuesto, permite reivindicar una operación tan elemental como lo es el producto de números naturales, pues habilita unas primeras discusiones sobre variaciones lineales y cuadráticas. Constituyendo de este modo conocimientos, que serán recuperados en el estudio progresivo de dichas variaciones.

BIBLIOGRAFÍA

- Alagia, Humberto- Bressan, Ana- Sadovsky, Patricia (2005): Reflexiones teóricas para la Educación Matemática. 1ra ed. Buenos Aires, Libros del Zorzal.
- Barallobres, Gustavo (2000): Algunos elementos de la didáctica del álgebra. UV Quebec, Canadá.
- Bolea, Pilar; Bosch, Mariana; Gascón, Josep. (2004): ¿Por qué la modelización está ausente de la enseñanza del álgebra escolar?, Quaderni di Ricerca in Didattica, 14, 125-133.
- Itzcovich, H. y otros (2006): Matemática 8. Editorial Tinta Fresca.
- Sadovsky, Patricia (2003): Condiciones didácticas para un espacio de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas. Universidad de Buenos Aires, Facultad de Filosofía y Letras. Buenos Aires. Introducción, Cap. 1, Cap. 2 y Cap. 3
- Sadovsky, Patricia (2005): Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos. 1ra ed. Buenos Aires, Libros del Zorzal.
- Sessa, Carmen (2007): Aportes para la enseñanza: Matemática. Función cuadrática, parábola y ecuación de segundo grado.
- Sessa, Carmen (2015): Hacer Matemática 7/1 y ½. Editorial Estrada
- Sessa, Carmen (2005): Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas. Buenos Aires, Libros del Zorzal
- Schliemann, Analucía- Carraher, David- Brizuela Bárbara (2011): El carácter algebraico de la aritmética. De las ideas de los niños a las actividades en el aula. 1ª ed. Buenos Aires, Editorial Paidós.

GOBIERNO PROVINCIAL

CORRIENTES
somos todos!

Ministerio de Educación
Dirección de Planeamiento e Investigación Educativa

DR. GUSTAVO VALDÉS
GOBERNADOR DE CORRIENTES

LIC. PRÁXEDES YTATÍ LÓPEZ
MINISTRA DE EDUCACIÓN

REINA a CABALLO